Práctico 4 - Funciones holomorfas

Def: Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω región (abierto y conexo)

Decimos que f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si existe y es un número complejo $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$

Obs: $z = Re(z) + i\, Im(z)$ $\quad (x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$

Dada $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ con $u, v: \Omega \to \mathbb{R}$ / $u = Re(f)$; $v = Im(f)$

Teorema: $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa $\Longleftrightarrow$ u, v son diferenciables y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Además si f es holomorfa,
$f'(x+iy) = u_x(x,y) - i\, u_y(x,y)$

1. Estudiar en qué puntos son derivables las siguientes funciones y en dichos puntos calcular la derivada.

   a) $f(z) = |z|$

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $v(x,y) = 0$

↑ No es dif. en $(0,0)$

$u_x = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $v_y = 0 \to x = 0$

$u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $-v_x = 0 \to y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ↯

$\Rightarrow f$ no es holomorfa para ningún $z_0 \in \mathbb{C}$

d) Sea $f(z) = \log(\varphi(z))$, donde $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ (log denota el logaritmo principal, es decir, el argumento pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$).

$\ln w$ no está def. en $w=0$ y no es continua en $\mathbb{R}^+$. En el resto de $\mathbb{C}$ es holomorfa ($\ln' w = \frac{1}{w}$)

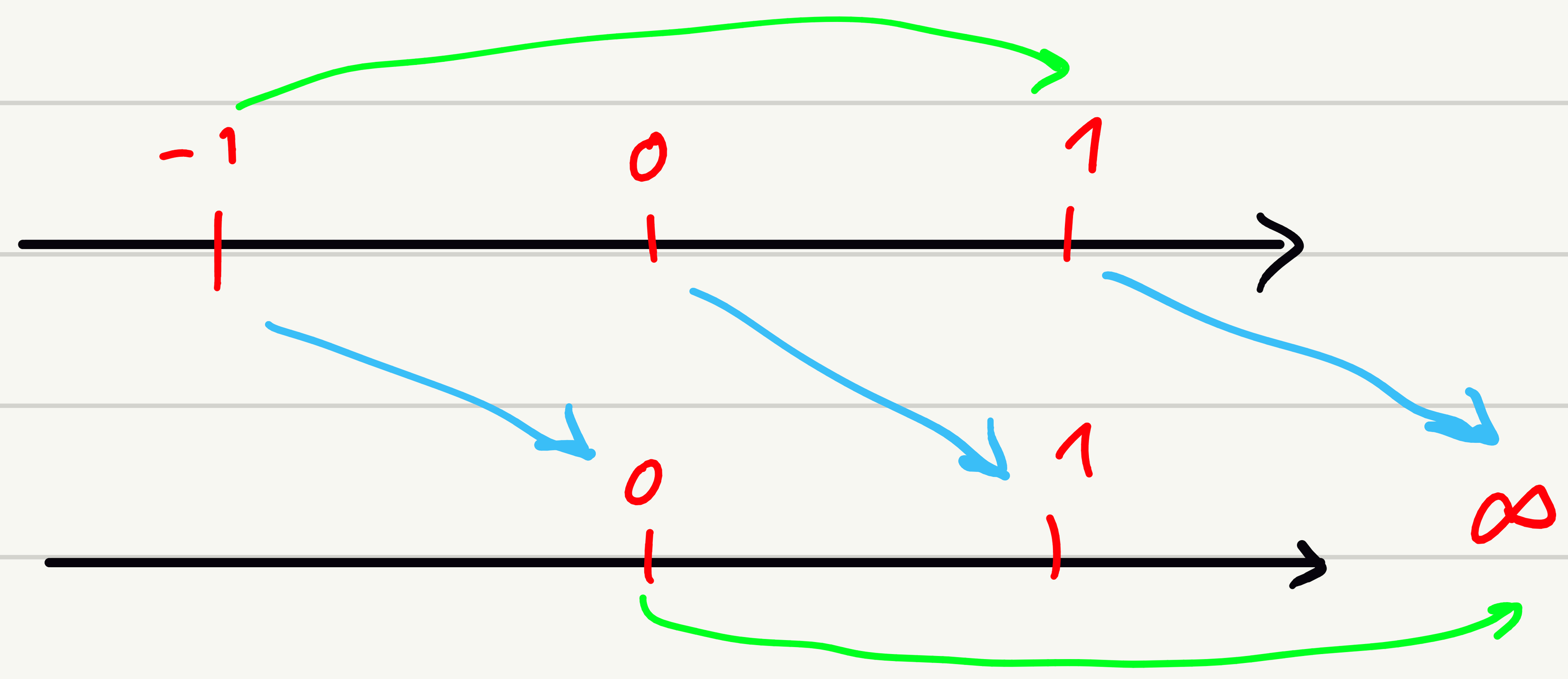
φ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Falta estudiar cuándo $\varphi(z) \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\varphi(-1) = 0$

$\varphi(0) = 1$

$\varphi(1) = \infty$



$\varphi(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ Por continuidad (Bolzano), $\varphi([-1,1]) \supseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Por inyectividad $\longrightarrow =$

Luego en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ f es holomorfa (Regla de la cadena)

3. *a*) Mostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable entonces el determinante del jacobiano de f vista como función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es $\det(J_{(x,y)} f) = |f'(z)|^2$.

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

↑ Rotohomotecia

$$|J_F| = u_x^2 + u_y^2$$

$$f'(z) = u_x - i u_y \Rightarrow |f'|^2 = u_x^2 + u_y^2 \quad \checkmark$$

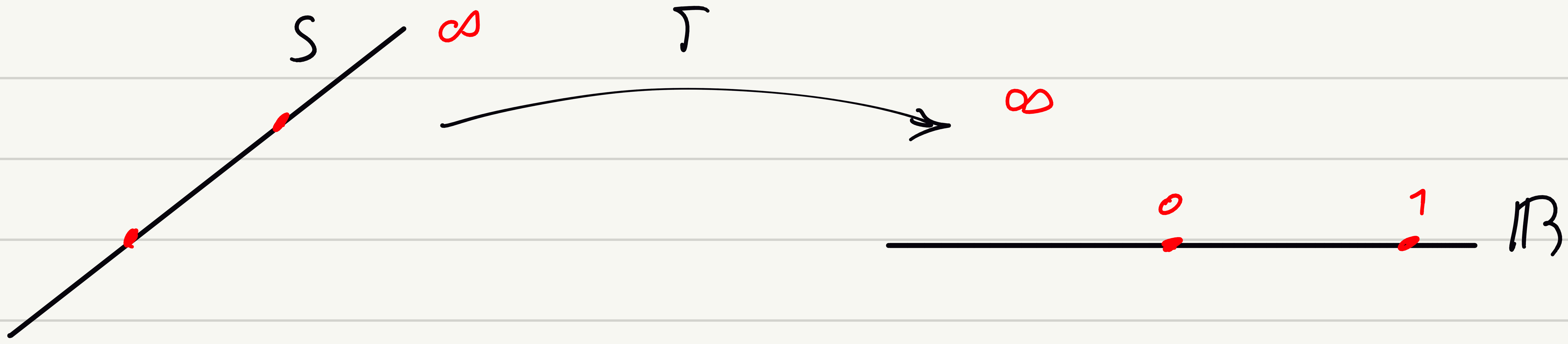
4. Se llama "región" a un conjunto abierto y conexo. Sea $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región. Probar que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante en Ω.

   a) $f'(z) = 0$ en Ω.

$$\left.\begin{array}{l} u_x - i u_y \Rightarrow u_x = u_y = 0 \Rightarrow u = cte \\ \qquad\qquad\quad \| \qquad \| \\ \qquad\qquad\quad v_y = -v_x = 0 \Rightarrow v = cte \end{array}\right\} \Rightarrow f = cte$$

$b)$ $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. $\quad V=0 \Rightarrow V_x = V_y = 0 \Rightarrow U_x = U_y = 0 \Rightarrow U = cte$

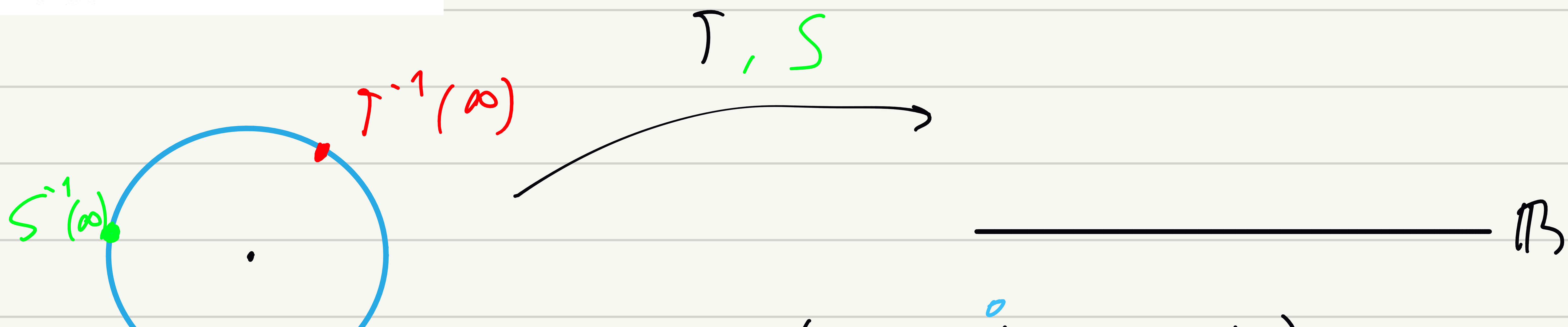
$c)$ $f(\Omega)$ esta contenido en un recta.



Sea T de Möbius / $T(S) = \mathbb{R}$

$T \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ está bien def. y cumple $(T\circ f)(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$
Además es holomorfa. Por b), $T\circ f \equiv c \Rightarrow f \equiv T^{-1}(c)$

$d)$ $|f(z)|$ constante en Ω.



$$T\circ f \in H(\Omega \setminus \overset{\circ}{f^{-1}}(T^{-1}(\infty)))$$

$$(T\circ f)(\Omega \setminus \overset{\circ}{f^{-1}}(T^{-1}(\infty))) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow T\circ f \equiv c \Rightarrow f \equiv \overset{S^{-1}}{T^{-1}}(c)$$

$e)$ $f(\Omega)$ tiene interior vacío. *Sugerencia: observar que el determinante del Jacobiano de f debe ser 0 en todo punto, por qué?*

Teorema de la función inversa:
Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $f \in C^1(\Omega)$, $p \in \Omega$, $|J_f(p)| \neq 0$
Entonces $\exists U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ entornos abiertos de p y $f(p)$ respectivamente con $U \subseteq \Omega$ tales que $f|_U : U \to V$ es biyectiva y $J_{f^{-1}}(f(p)) = [J_f(p)]^{-1}$

Si $|J_f(z)| \neq 0$, por el teorema de la función inversa,

$$f(z) \in V \subseteq \overset{\circ}{f(\Omega)} = \phi \quad \text{!!} \Rightarrow |J_f(z)| = 0 = |f'(z)|^2$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} f \equiv cte$$

Obs: $e) \Rightarrow b), c), d)$

8. ***Funciones armónicas.*** Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ se dice armónica cuando $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. El operador Δ se llama Laplaciano.

   a) Probar que si $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $\mathcal{R}e(f)$ e $\mathcal{I}m(f)$ son funciones armónicas.

   b) Muestre que la función $u(x, y) = \cosh(y)\sin(x)$ es armónica en el plano y construya otra función armónica $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

   c) Si $u : \mathbb{C}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ está definida por $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Observar que si bien es armónica, no es posible encontrar $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa que cumpla $\mathcal{R}e(f) = u$.

   d) Si $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, es armónica y Ω es simplemente conexo entonces existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica y tal que $f = u + iv$ es holomorfa.
   Sugerencia: Intentar vincular con el hecho de que todo campo irrotacional es de gradiantes si el dominio es simplemente conexo.

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x \iff -u_y = v_x$

$\nabla v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) = h \Rightarrow \operatorname{rot}(h) = u_{xx} + u_{yx} = 0$

Como $\operatorname{rot}(h) = 0$ y Ω es simp. conexo, $\exists v : \Omega \to \mathbb{R}, \nabla v = h$

Por construcción f es holomorfa.