

## PRÁCTICO 4: COMBINATORIA III

### Principio de Inclusión-Exclusión, funciones sobreyectivas, desórdenes y números de Stirling.

#### Ejercicio 1.

- (a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?
- (b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

**Ejercicio 2.** Se tira un dado 6 veces. Hallar la cantidad de formas en que podemos obtener un múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado. Por ejemplo, los resultados en orden  $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$  y  $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$  cuentan a favor como casos diferentes.

**Ejercicio 3.** ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa que contiene exactamente 3 canicas blancas, 3 rojas, 3 azules, y 3 negras?

**Ejercicio 4.** ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

**Ejercicio 5.** Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$  con las siguientes restricciones:

- (a)  $0 \leq x_i \leq 8$  para todo  $i$ .
- (b)  $0 \leq x_1 \leq 5$ ,  $0 \leq x_2 \leq 6$ ,  $3 \leq x_3 \leq 7$  y  $0 \leq x_4 \leq 8$ .
- (c)  $0 < x_1 \leq 4$ ,  $1 < x_2 < 5$ ,  $3 \leq x_3 \leq 7$  y  $0 \leq x_4 \leq 8$ .

**Ejercicio 6.** Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

- (a) Ningún dígito está en su posición original.
- (b) Los dígitos pares no están en su posición original.
- (c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

**Ejercicio 7.** ¿De cuántas formas se puede factorizar el número  $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.

**Ejercicio 8.** Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

**Ejercicio 9.** Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stirling de segundo tipo, respectivamente.

(a) Funciones Sobreyectivas:  $Sob(m + 1, n) = n \cdot (Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$ .

(b) Números de Stirling de segunda especie:  $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + n \cdot S(m, n)$ .

**Ejercicio 10.** Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a)  $n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Sob(m, i)$ .

(b)  $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$ .

(c)  $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_i$ , donde  $d_0 = 1$  y  $d_i$  es el número de desórdenes de tamaño  $i$ .