Práctico 3 - Series de potencias

Def: $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $a \in \mathring{\Omega}$

si existe y es un complejo $\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$

Prop: Sea $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Sea $R := \frac{1}{\underbrace{\limsup}_{\text{Supremo de los límites de todas las subsucesiones convergentes}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$. Luego $f(z)$ converge en $B(z_0, R)$, diverge en $\overline{B(z_0, R)}^c$ y es holomorfa en $B(z_0, R)$

Además $f'(z)$ también converge en $B(z_0, R)$ y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

1. Hallar el radio de convergencia y una fórmula explícita para la función suma en los siguientes casos:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+i) z^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n$

a) $a_n \equiv 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup \frac{|1|}{|1|}} = 1$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n \Rightarrow z S_N = \sum_{n=1}^{N+1} z^n \Rightarrow (1 - z) S_N = 1 - z^{N+1}$$

$$\Rightarrow S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow{N \to +\infty} \frac{1}{1 - z} \quad (|z| < 1)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = z \left(\frac{1}{1 - z} \right)'$

$= z \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$. $\quad R = 1$

2. Expandir en potencias de z las siguientes funciones y encontrar el radio de convergencia de cada una:

b) $\frac{1}{(1+z)^5}$

Deberes: $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$

$$\frac{4!}{(1-z)^5} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(4)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^{(4)} = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-z)^5} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} z^{n-4} = \sum_{n=4}^{\infty} C_4^n z^{n-4} = \sum_{n=0}^{\infty} C_4^{n+4} z^n$$

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

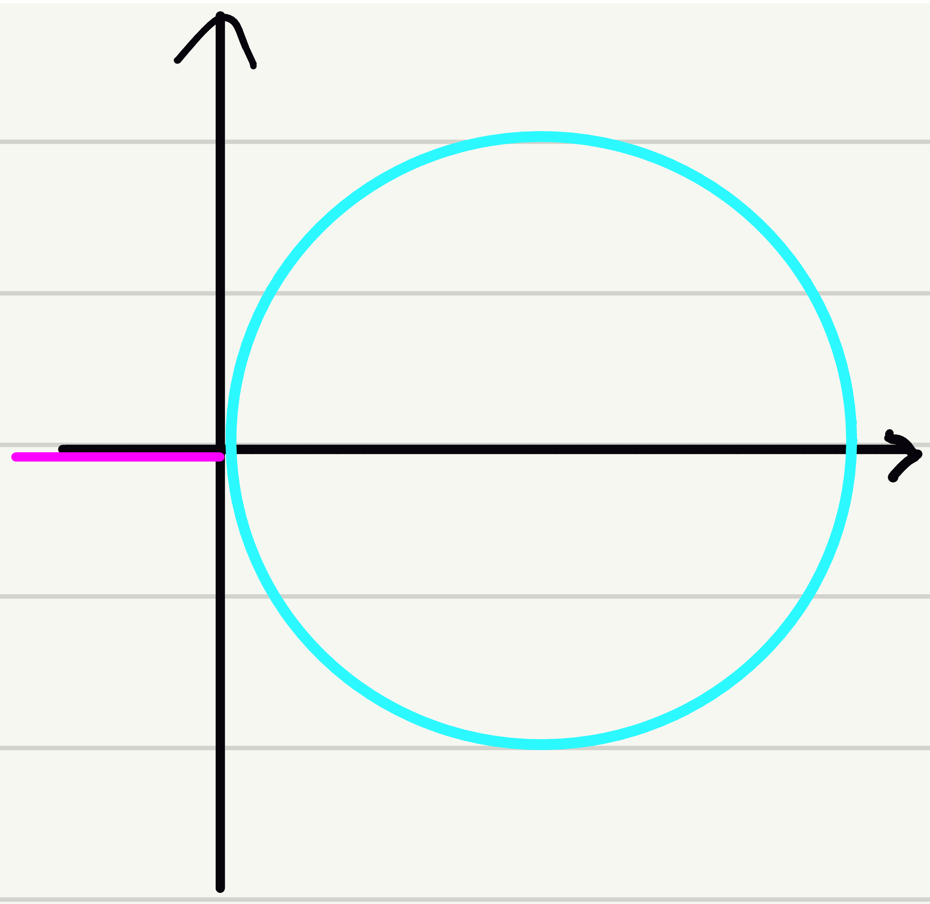
$$\Rightarrow \frac{1}{(1+z)^5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_4^{n+4} z^n$$

c) $\frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+z/4} \dots$

4. *a)* ¿Se puede definir $\log(1-z)$ de manera continua en el disco de radio 1?

$W = 1-z \Rightarrow z = 1-W$

$|z| < 1 \Rightarrow |1-w| < 1 \Rightarrow w \in B(1,1)$



$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

$\arg : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow [a, a+2\pi),\quad a \in \mathbb{R}$

Tomando por ejemplo $a = -\pi$, la discontinuidad queda en los reales negativos

b) Hallar radio de convergencia y fórmula explícita para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1-z}\, dz = -\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$