Introducción a la Teoría de la Información

Práctico 2: Procesos Estocásticos

Año 2024

Cada ejercicio tiene un símbolo que indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: $\diamondsuit$ básica, $\star$ media, $*$ avanzada, y $\ddagger$ difícil.

$\diamondsuit$ Problema 1

Sea $\{X_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ un proceso estocástico estacionario.
Demuestre que $H(X_0|X_{-1}, X_{-2}, ..., X_{-n}) = H(X_0|X_1, X_2, ..., X_n)$.

En otras palabras, el presente tiene una entropía condicional dado el pasado igual a la entropía condicional dado el futuro. Esto es cierto a pesar de que existen procesos estocásticos estacionarios para los cuales el flujo hacia el futuro se ve diferente del flujo hacia el pasado, es decir, observando un bloque de símbolos se puede distinguir si están presentados en el sentido del tiempo original o en sentido invertido. No obstante, dado un bloque de símbolos del proceso, la incertidumbre condicional del símbolo que lo sigue es igual a la del símbolo que lo antecede.

$\star$ Problema 2

Muestre que para una cadena de Markov (no necesariamente estacionaria) se cumple:

$$H(X_0|X_n) \geq H(X_0|X_{n-1}).$$

Por lo tanto, las condiciones iniciales X_0 se vuelven más difíciles de recuperar a medida que el futuro X_n se desarrolla.
Sugerencia: notar que $X_0 \to X_{n-1} \to X_n$.

⋆ Problema 3

$\mathrm{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Sea X_1 distribuida uniformemente sobre los estados $\{0,1,2\}$. Sea $\{X_i\}_1^\infty$ una cadena de Markov con matriz de transición P; es decir, se cumple $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}$ para $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

(a) ¿Es $\{X_i\}$ estacionaria?
(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, ..., X_n)$.

Ahora considere el proceso derivado $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, donde

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_i = X_i - X_{i-1} \pmod 3 \text{ para i} = 2, ..., n.$$

Por lo tanto Z_n codifica las transiciones, no los estados.

(c) Encuentre $H(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$.
(d) Encuentre $H(Z_n)$ y $H(X_n)$ para $n \geq 2$.
(e) Encuentre $H(Z_n | Z_{n-1})$ para $n \geq 2$.
(f) ¿Son Z_{n-1} y Z_n independientes para $n \geq 2$?

⋆ Problema 4

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso de Markov con conjunto de estados $\{0, 1\}$, donde X_1 tiene distribución uniforme en $\{0, 1\}$ y la matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular $H(X_n)$ para $n > 1$.
(b)Calcular una tasa de entropía del proceso.

∗ Problema 5

Sea X el tiempo de espera para que aparezca la primera cara en lanzamientos sucesivos de una moneda justa. Por ejemplo, $Pr\{X = 3\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.
Sea S_n el tiempo de espera para que aparezca la n-ésima cara. Por lo tanto

$$S_0 = 0$$

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

Donde $X_1, X_2, X_3, ...$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según la distribución anterior.
(a) ¿Es el proceso S_n estacionario?
(b) Calcula $H(S_1, S_2, ..., S_n)$.
(c) ¿El proceso S_n tiene una tasa de entropía? Si es así, ¿cuál es? Si no, ¿por qué no?

$\star$ Problema 6

Sea $\{X_i\}_{i>0} \sim$ Bernulli(p), variables i.i.d. sobre el alfabeto binario $\{0, 1\}$. Donde se cumple que $P(X_i = 1) = p$. Definimos el proceso $\{Y_i\}_{i>0}$ de manera que Y_i es la cantidad de unos consecutivos al final de $X_1, \ldots, X_i$, hasta que se encuentra un cero o se alcanza el inicio de la secuencia. Por ejemplo, para $X_1, \ldots, X_6 = 1, 0, 1, 1, 1, 0$ obtenemos $Y_1, \ldots, Y_6 = 1, 0, 1, 2, 3, 0$.

(a) ¿Es el proceso $\{Y_i\}_{i>0}$ estacionario?
(b) ¿Es un proceso de Markov?
(c) Calcule la tasa de entropía de $\{X_i\}_{i>0}$ en función de p.
(d) ¿Tiene $\{Y_i\}_{i>0}$ tasa de entropía? En caso afirmativo, ¿Cuánto vale?

$\star$ Problema 7

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso estocástico, definido sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ de la siguiente manera: para valores impares de n, X_n es el resultado de sortear una moneda justa de forma independiente (X_n es independiente de X_i para todo $i < n$). Para valores pares de n, X_n es igual a X_{n-1}.

(a) ¿Es este proceso estacionario? Justifique.
(b) Para cada una de las dos nociones de tasa de entropía vistas en el curso, indicar si esa tasa existe para este proceso y, en caso de existir, especificar cuánto vale.