Capítulo 2

Número real

2.1. Axiomas de cuerpo ordenado

1. Ordenar los siguientes números

   a) para $p > 1$, ordenar los números $0, 1, p, p^2, \sqrt{p}, \frac{1}{p}$.

   b) para $p \in (0, 1)$, ordenar los números $0, 1, p, p^2, \sqrt{p}, \frac{1}{p}$.

2. Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

   a) $x^2 - 2x > 3$ *b*) $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ *c*) $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$

   d) $\dfrac{2-x}{1+x} \leq \dfrac{1+x}{2-x}$ *e*) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ *f*) $\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{2x+1}{x}$

   g) $\sqrt{x+4} < x - 1$ *h*) $\sqrt{x^2+1} > 2x - 3$

   i) $|2x-5| < |3x+4|$ *j*) $x^2 - 5|x| + 4 \geq 0$ *k*) $3|x| - |x-2| > 2$

   l) $\sqrt{x+n} - \sqrt{x} > 1$ con $n \in \mathbb{N}$ *m*) $|nx| > x^2$ con $n \in \mathbb{N}$

3. **Intervalos (I)**

   Sean $a, b \in \mathbb{R}$, definimos el intervalo cerrado $[a, b]$ como $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$.

   a) Verificar que si $b < a$ entonces $[a, b] = \emptyset$, es decir que el vacio es un intervalo cerrado.

   b) Probar que la intersección de dos intervalos cerrados es un intervalo cerrado.

   c) De un ejemplo donde la unión de dos intervalos cerrados es un intervalo cerrado y un ejemplo donde no.

4. **Medias**

   En este ejercicio se estudiarán distintos tipos de medias entre dos números.

   Sean a, b dos números reales tales que $0 < a < b$. Se definen las siguientes medias:

$A := \frac{a+b}{2}$	$G := \sqrt{ab}$	$H := \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
Media aritmética	Media geométrica	Media armónica

   Demostrar que $a < H < G < A < b$.

   Definimos ahora la media cuadrática como

$$C := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

   Probar que $a < C < b$ y comparar C con las otras medias.

5. Bosquejar en el mismo par de ejes los siguientes conjuntos

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ *b*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|,|y|\} = 1\}$

6. **Suma de conjuntos I**

   Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

   a) Calcular αA para los siguietes ejemplos

      a) $\alpha = 2,\ A = \{0,2,4\}$ *b*) $\alpha = -1,\ A = \{-4,-1,0,1\}$

   b) Calcular $A + B$ para los siguientes conjuntos

      c) $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,\pi\}$ *d*) $A = \{0,2,3\},\ B = \{\sqrt{2},\pi\}$

   c) Calcular $\mathbb{Z} + \{-1,2,5\}$. Calcular $\mathbb{Z} + \{1,2,\frac{5}{2}\}$.

   d) Dados $a,\ b,\ p \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcular $\{p\} + [a,b]$ y $\{p\} + (a,b)$.

2.2. Funciones reales

1. Bosquejar las siguientes funciones reales

   a) $f(x) = x + |x+1|$ *b*) $f(x) = |x| + |x+1|$ *c*) $f(x) = 2x + |x+1|$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = \text{signo}(x)$.

   Probar que $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ y que $g \circ f = f \circ g$.

3. Sea $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la función que se muestra en la pagina de EVA (Tema 1: ... Cálculo de imagen).

   Sea $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función restricción de f al intervalo $[a, b]$, esto es $f|_{[a,b]}(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Calcular la imagen de $f|_{[a,b]}$ para los siguientes valores de a y b

   a) $a = -3, b = 3$ *b*) $a = -3, b = -2$ *c*) $a = -3, b = 0$ *d*) $a = 0, b = 2$

4. **Funciones afines**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *afín* si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ tales que $f(x) = ax + b$.

   a) Verificar que si $b = 0$ entonces $f(x + z) = f(x) + f(z)$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Mostrar que ésto no es válido si $b \neq 0$.

   b) Probar que f es biyectiva y calcular su inversa.

   c) Decimos que dos funciones $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *conmutan* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $u(v(x)) = v(u(x))$. Determinar qué funciones afines conmutan con $f(x) = x + 2$. Repetir para $g(x) = 2x$ y $h(x) = 2x + 4$.

5. **Funciones monótonas (I)**

   Determinar, a partir de los axiomas de cuerpo ordenado, cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente monótonas, monótonas o no son monótonas.

   a) $f(x) = x - 5$ *b*) $f(x) = -2x$ *c*) $f(x) = |x|$

   d) $f(x) = x^2$ *e*) $f(x) = x^3$

6. **Funciones convexas**

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función (donde I es un intervalo o $\mathbb{R}$), decimos que f es *convexa* si $\forall a, b \in I$, $\forall t \in [0, 1]$ se cumple que $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$.

   En otras palabras, dados dos puntos del gráfico de f, si se traza el segmento de recta por ellos, el gráfico de f nunca está por arriba de dicho segmento.

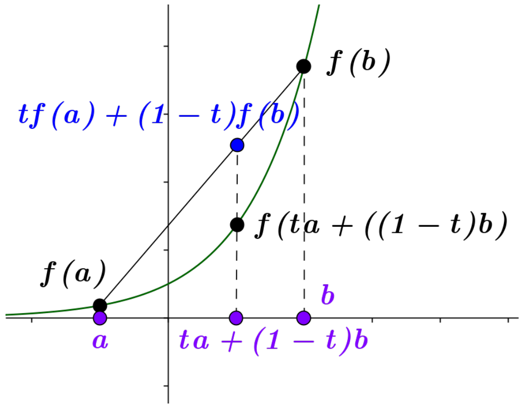

Figura 2.1: ejemplo de una función convexa

a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es convexa.

b) Probar que la condición de convexidad es equivalente a la siguiente condición:

Dados $a, b \in I$ con $a < b$ se cumple que $f(c) \leq f(a) + (c-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ para todo c tal que $a \leq c \leq b$.

c) Determinar cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son convexas

a) $f(x) = |x|$ *b*) $f(x) = x^2$ *c*) $f(x) = x^3$ *d*) $f(x) = \sqrt{|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ *f*) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que si existen $a < b < c$ tales que $f(b) > f(a)$ y $f(b) > f(c)$, entonces f no es convexa. Dé un ejemplo de una función f convexa tal que existen $a < b < c$ donde $f(b) < f(a), f(b) < f(c)$

7. Construir una función biyectiva entre los siguientes intervalos:

a) $I = [0,5],\ J = [3,4]$ *b*) $I = (2,6),\ J = (0,1)$ *c*) $I = (1,4],\ J = [1,4)$

d) $I = (0,+\infty),\ J = \mathbb{R}$ *e*) $I = (0,2),\ J = \mathbb{R}$ *f*) $I = [1,2),\ J = [0,+\infty)$

g) $I = [0,1],\ J = [0,1)$

8. **Funciones lipschitzianas (I)**

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *lipschitziana* (o de Lipschitz) si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para todo par $x, y \in I$ se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Determinar cuáles de las siguientes funciones son lipschitzianas.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 7$

b) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\text{signo}(x)$

9. **Funciones lipschitzianas (II)**

   Una interpretación de la propiedad de Lipschitz es que si una función es de Lipschitz, con constante de Lipschitz K, entonces para cada punto de la forma $(x_0, f(x_0))$ el gráfico de la función está entre la recta $y=K(x-x_0)+f(x_0)$ y la recta $y=-K(x-x_0)+f(x_0)$.

   Ir a la pagina de EVA a la sección Tema 1: ... Visualización geométrica de funciones de Lipschitz, y determinar si esas funciones son funciones de Lipschitz y en caso de serlo determinar una constante K.

2.3. Axioma de completitud

1. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$, además hallar supremo e ínfimo y estudiar si son máximos y mínimos respectivamente.

   a) $[-1,1]$ b) $(2,5)$ c) $(2,6]$ d) $[-10,-2)$ e) $\{0\}$

   f) $[2,5]\cup[0,1]$ g) $[-1,1]\cap(0,2)$ h) $[0,5)\setminus(1,2)$ i) $[1,2]\setminus(1,2)$

   j) $([1,2]\cup[3,4])\cap[0,3]$ k) $[1,2]\cup([3,4]\cap[0,3])$

   l) $[1,3]\setminus([1,4]\setminus[2,3])$ m) $[1,4]\setminus([1,3]\setminus[2,3])$

2. Hallar supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente.

   a) $\left\{x\in\mathbb{R}: x=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ b) $\{\theta\in[0,10]:\cos(\theta)=\sin(\theta)\}$

   c) $\{\theta\in[0,10]:\cos(\theta)<\sin(\theta)\}$ d) $\{\theta\in[0,10]:\tan(\theta)<1\}$

   e) $\left\{x\in\mathbb{R}: x^2\le 3\right\}$ f) $\{x\in\mathbb{R}^+:(x-1)(x-2)<0\}$

   g) $\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{3x+1}{x-2}\le 0\right\}$ h) $\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{2x+1}{x-3}\le 0\right\}$

   i) $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ j) $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ k) $\{x: x^2+x-1\le 0\}\cap\mathbb{Q}$

3. Sean $A,B\subset\mathbb{R}$ no vacíos.

   a) 1) Si $A\subset B$ y B es acotado, demostrar que $\inf(B)\le\inf(A)\le\sup(A)\le\sup(B)$.

   2) Dar un ejemplo en donde $A \subset B$, B sea acotado y además $\inf(B) = \inf(A) < \sup(A) < \sup(B)$.

b) 1) Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
   2) Dar un ejemplo en donde $a < b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \inf(B)$.

c) Probar que si A esta acotado entonces $A \subset [\inf(A), \sup(A)]$.

4. **Consecuencias básicas de la definición de supremo**

   a) Probar que el axioma de completitud (existencia de supremo para conjuntos no vacíos acotados superiormente) es equivalente a la siguiente propiedad: *"todo conjunto no vacíos acotado inferiormente tiene ínfimo"*.

   b) Sea A un conjunto no vacío, acotado superiormente y $\alpha = \sup(A)$. Probar que para todo $\delta > 0$, existe $a_\delta \in A$ tal que $\alpha - \delta < a_\delta \leq \alpha$.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Probar que si $\alpha = \sup(A) \notin A$ entonces A es infinito.

6. Sea $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$. Probar que A está acotado inferiormente. Notemos α al ínfimo de A.

   a) Verificar que $\alpha \geq 0$.

   b) Verificar que si α es una cota inferior entonces 2α también lo es.

   c) Deducir que $\alpha = 0$. Deducir que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

8. (Primer parcial, primer semestre 2016) Sea $A = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Indicar la opción correcta.

   a) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no máximo.

   b) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

   c) A tiene supremo, que es máximo.

   d) A no está acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

   e) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

9. a) Probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Deduzca que para $x \in \mathbb{R}$, existen m y n enteros, tales que $m < x < n$.

   b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^+$ definimos el conjunto A_{x_0} como $A_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{x_0}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N}^+\}$. Probar que $\inf(A_{x_0}) = 0$.
   Deducir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

10. **Suma de conjuntos II** (Las operaciones de suma y producto en conjuntos son las del Ejercicio 6.

a) 1) Probar que si A y B son acotados, entonces $\inf(A+B) = \inf(A)+\inf(B)$ y $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

2) Si $A = (0,2]$ y $C = (0,3]$, encontrar un conjunto B tal que $A+B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el item anterior.

b) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$.

2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ e $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.

2.4. Funciones reales y axioma de completitud

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, es decir el mayor entero menor o igual a x.

   Bosquejar las funciones

   a) $f(x)$ *b*) $f_1(x) = x - f(x)$ *c*) $f_2(x) = \sqrt{f_1(x)}$ *d*) $f_3(x) = f(x) + f_2(x)$

   e) $f_4(x) = f(x) + |x+1|$ *f*) $f_5(x) = f(x+1) + |2x|$

   g) $f_6(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ *h*) $f_7(x) = \dfrac{1}{f_6(x)}$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que los conjuntos $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ están acotados.

   Fijo un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, probar que

   $$\sup\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} + \sup\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   $$\inf\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \geq \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} + \inf\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   Dar ejemplos donde se cumplan las desigualdades estrictas.

   Dar un ejemplo de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ esté acotado y $f(x) < \sup(\mathrm{Im}(f))$ para todo $x \in [a,b]$.

3. **Funciones monótonas (II)**

   a) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente crecientes entonces $f \circ g$ y $f+g$ también lo son. ¿Qué se puede decir de $f \times g$?

   b) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente, y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$.

   1) Probar que el conjunto $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ está acotado y además $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(b)$.

   2) Probar que la preimagen de f de un intervalo es un intervalo.

3) Probar que se cumplen las siguientes desigualdades.

$$\sup\{f(x) : x < a\} \leq f(a) \leq \text{ínf}\{f(x) : x > a\}$$

Dé ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

4. **Definición de la función raíz cuadrada**

En este ejercicio se definirá la función $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(a) = a^2$. Probar que g es estrictamente monótona.

b) Dado $x \in \mathbb{R}^+$, probar que el conjunto $A_x = \{a \in \mathbb{R} : a^2 \leq x\}$ está acotado superiormente.

c) Definimos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sup(A_x)$. Probar que f es monótona creciente.

d) Veamos ahora que $f(x)^2 = x$

1) Probar que si $\alpha^2 < x$, entonces existe $h > 0$ tal que $(\alpha+h)^2 < x$. Deducir a $f(x)^2 \geq x$
2) Probar que si $\alpha^2 > x$, entonces existe $h > 0$ tal que $(\alpha - h)^2 > x$. Probar que en este caso se verifica que $[\alpha - h, \alpha] \cap A_x = \emptyset$. Concluir que $f(x)^2 \leq x$.
3) Deducir de lo anterior que $f(x)^2 = x$.

5. **Morfismos de Cuerpos**

En este ejercicio se estudiará qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no nulas, verifican las siguientes propiedades

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y) \tag{2.1}$$

En cada paso mencionar qué propiedad o parte anterior se usó.

a) Probar que $f(0) = 0$.

b) Probar que $f(1) = 1$.

c) Para $n \in \mathbb{N}$, calcular $f(n)$.

d) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$, calcular $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

e) Probar que $f(a^2) \geq 0$. Deducir que $f(a) > 0$ para todo $a > 0$.

f) Probar que f es estrictamente creciente, esto es, que si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

g) Dado $x \in \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $\{f(a) : x < a, a \in \mathbb{Q}\}$ y $\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$ están acotados inferior y superiormente respectivamente.
Probar que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} \leq f(x) \leq \text{ínf}\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$.

h) Verificar que para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} = \text{ínf}\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$. Deducir que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i) Dar funciones distintas de la identidad que cumplan una de las propiedades pero no la otra.

6. **Definición de la función potencia**

En este ejercicio se definirá la función $f(x) = 2^x$ y se probarán las propiedades básicas de la potencia.

a) Definimos $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por inducción como

- $f_1(1) = 2$
- $f_1(n+1) = 2f_1(n), \forall n \in \mathbb{N}$

1) Probar que $f(n+m) = f(n)f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.
2) Probar que la función f_1 es estrictamente creciente y $Im(f_1)$ no está acotada.

b) Para definir la función en los enteros simplemente invertimos. Sea $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_2(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{f_1(n)} & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Probar que $f_2(n+m) = f_2(n)f_2(m), \forall n, m \in \mathbb{Z}$.
2) Probar que la función f_2 es creciente.

c) Veamos ahora cómo definir f en $\mathbb{Q}$, surge así el problema de las fracciones, por ejemplo $2^{\frac{1}{2}}$,

Sea $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma: dado $\frac{p}{q}$ fracción irreducible $f_3\left(\frac{p}{q}\right) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^q \leq f_2(p)\}$.

1) Verificar que la función f_3 es una extensión de f_2, es decir $f_2(n) = f_3(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.
2) Probar que $f_3(x+y) = f_3(x)f_3(y)$.
3) Probar que la función f_3 es estrictamente creciente.

d) Estamos ahora en condiciones de definir f como función real.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ tal que } z \in \mathbb{Q}, z \leq x\}$$

1) Verificar que la función f está bien definida.
2) Probar que la función f es una extensión de f_3, es decir $f(x) = f_3(x), \forall x \in \mathbb{Q}$.
3) Probar que la función f es estrictamente creciente.
4) Probar que $f(x+y) = f(x)f(y)$.
5) Probar que dado $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades $\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(x) : x > a\}$.

e) Verificar que la definición se puede adaptar a cualquier base. Explique qué cambiaría para definir 3^x.

f) Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ probar que $f(x)g(x) = (ab)^x$.

2.5. Complementarios

1. Probar a partir de los axiomas de cuerpo que:

    a) El opuesto de 0 es 0 (es decir $-0 = 0$).

    b) El inverso de 1 es 1 (es decir $1^{-1} = 1$).

    c) El opuesto del opuesto de a es a (es decir $-(-a) = a$).

    d) $a \times 0 = 0$ para todo a.

    e) El opuesto de a por b es igual al opuesto de b por a, que es igual al opuesto del producto de a y b (es decir $-a(b) = -b(a) = -(ab)$).

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar que:

    a) $1 > 0$.

    b) Para todo par de números a, b se tiene exactamente una de las siguiente propiedades $a < b$, $a = b$ o $a < b$.

    c) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

    d) Si $0 < a < b$ entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

3. Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el polinomio definido por $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$. Definimos $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{P(x)-P(1)}{x-1}$.
   Probar que f se puede extender a un polinomio, es decir existe $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomio, tal que $f(x) = Q(x)$ para todo $x \neq 1$.

4. En cada caso determinar funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifiquen las igualdades propuestas

    a) $f\left(x^3 + 1\right) = 2x + 3$ *b*) $f\left(x^2\right) = x\sin(x) + 1$

    c) $f\left(\sqrt{x} + 1\right) = x^2 + 3$, para $x > 0$ *d*) $f\left(\dfrac{1}{x+3}\right) = 3x - 1$, para $x \neq -3$

5. **Funciones convexas II**
   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \text{signo}(x)$. Determinar si es convexa en los siguientes dominios.

    a) $I = [2, 3]$ *b*) $I = [-1, 1]$ *c*) $I = [0, 1]$ *d*) $I = [-1, 0]$

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ acotados y no vacíos, y tal que $A \setminus B$ es no vacío.

    a) Probar que $\sup(A \setminus B) \leq \sup(A)$.

    b) Probar que si $\sup(B) < \sup(A)$ entonces $\sup(A \setminus B) = \sup(A)$.

    c) De un ejemplo donde $\sup(B) = \sup(A)$ y $\sup(A \setminus B) < \sup(A)$.

  d) De un ejemplo donde $\sup(B) = \sup(A)$ y $\sup(A \setminus B) = \sup(A)$.

7. Dados dos conjuntos no vacíos A, B, definimos $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$ y $A * B = \{ab, a \in A, b \in B\}$.

   Si A y B están acotados, calcular $\sup(A - B)$ en función del supremo e infimo de A y B.

   Si A y B están acotados, calcular $\sup(A * B)$ en función del supremo e infimo de A y B.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1$, si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$, si $x \notin \mathbb{Q}$.

   Calcular la imagen de f restricta al intervalo $[a, b]$ donde $a < b$.

9. Recordemos que la distancia entre dos puntos del plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ está dada por la fórmula $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$. Notamos la distancia entre A y B como $d(A, B)$

   A partir de ésto se pueden definir distancias entre otros objetos geométricos.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $P = (p_1, p_2)$ un punto, definimos la distancia entre $gr(f)$ (gráfico de f) y P como $\inf\{d(P, A) : A \in gr(f)\}$.

   a) Probar que si P pertenece al gráfico de f, entonces la distancia es 0.
   b) Calcular la distancia entre el gráfico de $f(x) = 3x + 1$ y el punto $P = (3, 0)$. Probar que existe $Q \in gr(f)$ tal que $d(P, Q)$ es igual a la distanicia entre $gr(f)$ y P. Trazar la recta entre P y Q e interpretar geométricamente el resultado.
   c) Dé un ejemplo de función f, y punto P tales que la distancia entre P y f sea 0 pero P no pertenezca al gráfico de f.

10.

   a) Probar que dado $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ y $x \in \mathbb{Q}$, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < x + z < y$.
   b) Construir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(n) > 0$ para todo n y además $\sum_{i=0}^{N} f(i) < 10$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

11. **Topología I**

    Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *abierto*, si para todo $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$.

    Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *cerrado* si A^c es abierto.

    a) Probar que $A = (a, b)$ es abierto.
    b) Probar que $A = [a, b]$ es cerrado, en particular $A = \{0\}$ es cerrado.
    c) Probar que $A = [0, 1)$ no es abierto ni cerrado.
    d) Probar que si A es no vacio, esta acotado y es abierto, entonces $\sup(A) \notin A$. Probar que si A es no vacio, esta acotado y es cerrado, entonces $\sup(A) \in A$.

e) Probar que $\emptyset$ es abierto y cerrado. Probar que $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado.

f) Probar que si A, B son abiertos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son abiertos. Repetir para A, B cerrados.

g) Probar que $\mathbb{N}$ es cerrado.

12. **Topología II**

Sea $A \subset R$, decimos que A *no es conexo* si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap U \neq \emptyset$. En caso contrario se dice que A es *conexo*.

a) Probar que $A = \{0, 1\}$ no es conexo.

b) Probar que $A = [0, 1]$ es conexo.

c) Probar que $\mathbb{Q}$ no es conexo.

13. **Funciones monótonas a trozos**

Si bien muchas funciones sencillas con las que trabajamos no son monótonas, sí son monótonas a trozos. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ no es monótona en $\mathbb{R}$ pero sí es monótona si la restringimos al intervalo $(-\infty, 0]$ o al intervalo $[0, +\infty)$.

Tenemos así que para esta función, el dominio está compuesto por intervalos (trozos) donde la función sí es monótona.

Podemos intentar dar entonces una definición de función monótona a trozos en ese sentido.

Empezamos por estudiar el problema cuando la función está definida en un intervalo cerrado.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números, con $a < b$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.

Proto definición 1: Decimos que la función f es *monótona a trozos* si existen una cantidad finita de intervalos cerrados $I_1, \ldots, I_n$ tales que

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [a, b]$. Es decir, la unión de estos intervalos es $[a, b]$ el dominio de la función.
- $f|_{I_j}$ es monótona. Es decir la función f es monótona restricta a cada uno de estos intervalos.
- $\#I_i \cap I_j \leq 1$ si $i \neq j$. Es decir la intersección de dos de estos intervalos consta de a lo sumo un punto, en otras palabras, dos intervalos distintos solo se intersecan a lo sumo en el borde.

El último punto no es necesario, pero sirve para vizualizar mejor la definición.

Proto definición 2: Si existen una cantidad finita de intervalos disjuntos $I_1, \ldots, I_n$ tales que

- $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [a,b]$
- $f|_{I_i}$ es monótona.

Para que esta definición tenga sentido, se tiene que permitir que los intervalos sean abiertos y/o semi abiertos. Además permitimos puntos como intervalos ($[c,c]$ es un intervalo que consta solo del punto c).

a) Probar que la proto definición 1 es equivalente a que existan una cantidad finita de puntos $a_1,...,a_n$, con $a_i < a_{i+1}$, $a_1 = a$, $a_n = b$ tales que $f|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es monótona

b) Probar que la función $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$ es monótona a trozos con ambas proto definiciones.

c) Probar que la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, es monótona a trozos con la proto definición 2 pero no con la proto definición 1.

d) Probar que las funciones convexas son monotonas a trozos con ambas proto definiciones.

e) Probar que la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$ no es monotona a trozos con ninguna de estas proto definiciones. Conjeture una proto definición para que esta función si sea monótona a trozos.