

Examen - Funciones de Variable Compleja

16 de febrero de 2024

1 (45 puntos)

Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{2z - i}{-iz - 2}$$

1. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el disco unidad. Probar que $T(D) = D$.
2. Sea \mathcal{F} la familia de todas las rectas por el origen. Probar que existe un elemento $r_0 \in \mathcal{F}$ tal que $T(r_0)$ es una recta.
3. Hallar explícitamente la recta $T(r_0)$.

2 (45 puntos)

Se considera la función

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)}$$

1. Encontrar los residuos de f en cada uno de sus polos.
2. Calcular la integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

siendo γ el resultado de la concatenación del intervalo $[-R, R]$ con el semicírculo superior de radio R y centrado en el origen, y $R > 3$.

3. Justificando la respuesta, hallar el valor de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)} dx.$$

3 (10 puntos)

Sea γ el arco de circunferencia $|z| = 2$, recorrido en sentido anti-horario desde $z = 2$ hasta $z = 2i$. Probar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$