Práctico 1

métricas, normas y producto interno

1. Sea $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ una función tal que
   - $d(x,y) = 0$ si, y solamente si, $x = y$.
   - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$.

   Demuestre que d es una métrica.

2. Sea $\|-\|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una norma en $\mathbb{R}$. Demuestre que existe $\lambda > 0$ tal que
$$\|x\| = \lambda |x|,$$
   para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $|x|$ denota el valor absoluto de x. Concluya que toda norma en $\mathbb{R}$ proviene de un producto interno.

3. Sea (M,d) un espacio métrico, donde M es un espacio vectorial real. Entonces, d proviene de una norma $\|-\|\colon M \to \mathbb{R}$ (es decir, $d(x,y) = \|x-y\|$ para todo $x,y \in M$) si y solamente si para todo $x,y,z \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que
$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \text{y} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y).$$

4. Sea X un conjunto con más de un elemento y $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de funciones $f\colon X \to \mathbb{R}$ que son acotadas. Demuestre que la norma $\|-\|_\infty\colon \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| \ \text{ para todo } f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}),$$
   no proviene de un producto interno en $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Concluya lo mismo para $\mathbb{R}^n$ (con $n > 1$) con la norma $\|-\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por
$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} \ \text{ para todo } (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

5. Considere $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea $d_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \ \text{ para todo } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$
   Sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto no vacío tal que $d_2|_{X\times X}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ resulta ser la métrica discreta, es decir,
$$d_2|_{X\times X}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2), \\ 0 & \text{si } (x_1,y_1) = (x_2,y_2). \end{cases}$$
   Demuestre que X posee a lo sumo tres elementos. ¿Qué sucede si reemplazamos $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^3$, conservando las métricas anteriores?

6. Sea $(V, \|-\|)$ un espacio vectorial real y normado.
   (a) Para $u,v,w \in V$, demuestre que si
$$w - u = t(v-u)$$
   para algún $t \geq 1$ (es decir, w está sobre la recta de dirección $v-u$ y que pasa por u), entonces
$$d_{\|-\|}(w,u) = d_{\|-\|}(v,u) + d_{\|-\|}(w,v),$$
   donde $d_{\|-\|}$ es la métrica inducida por $\|-\|$.

(b) Muestre mediante un contraejemplo que el recíproco de (a) no es cierto en general, es decir, que puede cumplirse la igualdad $d_{\|-\|}(w,u) = d_{\|-\|}(v,u) + d_{\|-\|}(w,v)$ sin necesidad de que exista $t \geq 1$ tal que $w - u = t(v - u)$.
Sugerencia: Puede ayudar considerar $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|-\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|(x,y)\|_1 := |x| + |y| \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

junto con los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

(c) Supongamos ahora que $(V, \langle -,- \rangle)$ es un espacio vectorial real con producto interno $\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ y que $\|-\| \colon V \to \mathbb{R}$ es la norma inducida por $\langle -,- \rangle$, es decir,

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle} \quad \text{para todo } v \in V.$$

Dados $u, v, w \in V$ distintos, demuestre que si

$$d_{\|-\|}(w,u) = d_{\|-\|}(v,u) + d_{\|-\|}(w,v),$$

entonces existe $t \geq 1$ tal que

$$w - u = t(v - u).$$

En otras palabras, bajo la condición adicional de tener una norma inducida por un producto interno, sí se cumple el recíproco de (a).