Producto escalar y vectorial

1. Calcular producto escalar, vectorial, norma y ángulo de los siguientes vectores:
   (a) $u = (3, 1, 1)$ y $v = (-1, 2, 1)$
   (b) $u = (2, -1, 1)$ y $v = (1, -2, 5)$
   (c) $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, 0, 0)$
   (d) $u = (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ y $v = (-1, 2, 1)$
2. Calcular la distancia entre puntos A y B
   (a) $A = (3, -1, 2)$ y $B = (0, 0, 2)$
   (b) $A = (2, 1, 1)$ y $B = (1, 1, 3)$
3. Hallar un vector de norma 1 que sea perpendicular a u y v
   (a) $u = (1, 2, -3)$ y $v = (2, -1, 3)$
   (b) $u = (2, -1, 1)$ y $v = (3, 0, 1)$
4. Resolver los siguientes problemas utilizando producto vectorial
   (a) Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 1, 4)$ y $C = (3, 3, 6)$, hallar el área del mismo.
   (b) Mostrar que los puntos $A = (1, 1, 5)$, $B = (4, 7, 6)$ y $C = (2, 9, 5)$ y $D = (-1, 3, 4)$ son vértices de un paralelogramo y hallar su área.
   (c) Calcular el área del triángulo de vértices: $A = (1, 1, -1)$, $B = (1, 2, 0)$ y $C = (1, 0, 1)$.
   (d) Se considera un triángulo ABC que es rectángulo en A, siendo $A = (3, 0, 1)$, $B = (6, -4, 5)$ y $C = (5, 3, a)$. Hallar a y el área del triángulo.
5. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a $\vec{n}$
   (a) $A = (2, 1, -1)$ y $\vec{n} = (-1, 1, 3)$
   (b) $A = (1, 2, -1)$ y $\vec{n} = (4, -1, 2)$
6. Hallar la ecuación cartesiana del plano en los siguientes casos:
   (a) Pasa por $A = (1, 1, 1)$ y tiene vectores directores $v = (2, -1, 3)$ y $u = (4, 6, 2)$
   (b) Pasa por $A = (2, 1, 0)$ y tiene vectores directores $v = (-1, -1, 2)$ y $u = (2, -1, -1)$
   (c) Contiene a los puntos $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 2, -1)$ y $C = (1, 0, 1)$
   (d) Contiene a los puntos $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, -1, -1)$ y $C = (1, 2, -1)$
7. Determinar los valores de a para que la recta r y el plano π sean paralelos.
   (a) $\pi) x + ay + 2az = 4$ y $r = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$
   (b) $\pi) ax - y + z = -1$ y $r = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$
8. Probar que las siguientes rectas son perpendiculares
   (a) $r = \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$
   (b) $r = \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases}$

9. Probar que los siguientes planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos

   (a) $\pi_1)x - 2y - 2z = 12$ y $\pi_2)x - 2y - 2z = 6$

   (b) $\pi_1)2x - 3y + 6z = 14$ y $\pi_2)4x - 6y + 12z = -21$

10. Estudiar las posiciones relativas de las siguientes rectas

    (a) $r = \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + z = -1 \end{cases}$

    (b) $r = \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 1\lambda \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

11. Estudiar las posiciones relativas de la recta y el plano

    (a) $\pi : -x + 3y + 2z + 5 = 0$ y $r = \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

    (b) $\pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $r = \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

12. Estudiar las posiciones relativas de los siguientes planos

    (a) $\pi_1 : x + y + z = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$

    (b) $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = 1 + 3\lambda - \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

13. (a) Hallar el valor de a para que las rectas $r = \begin{cases} 2x - y = a \\ z + 2y = 3 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ se corten.

    (b) Para el valor hallado de a en la parte anterior, determinar la ecuación del plano que contiene a r y a s

14. Calcular la distancia del punto Q a la recta r o plano π, según corresponda

    (a) $Q = (1, -2, 3)$ y $\pi)2x + y + z = 1$

    (b) $Q = (1, 3, 5)$ y π el plano que pasa por el punto $P = (-1, 1, 7)$ y es perpendicular a $\vec{n} = (-1, 1, -1)$

    (c) $Q = (4, -1, 5)$ y π el plano determinado por $T = (1, 3, 1)$ y $r = \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$

    (d) $Q = (1, 1, 1)$ y $r = \begin{cases} x + 2z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

    (e) $Q = (1, 3, -2)$ y $r = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

15. Probar que la recta r es paralela al plano π, y hallar la distancia entre ambos

    (a) $\pi : x + y - 2z - 5 = 0$ y $r = \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

    (b) $\pi : x + 3y = 0$ y $r = \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

16. Probar que la recta $r = \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ no se cortan y hallar un plano que contenga a s y sea paralelo a r.

17. Dadas las rectas

$$r = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \text{ y } s \text{ que pasa por los puntos } (2, -5, 1) \text{ y } (2, -5, 0)$$

hallar un punto A en r y un punto B en s, de tal forma, que el vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas. Calcular la distancia entre r y s.

18. Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$$r = \begin{cases} x + 3y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \text{ y } s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

   (a) Estudiar la posición relativa de r y s.
   (b) Determinar la recta que corta perpendicularmente a r y s.
   (c) Calcular la distancia entre r y s.

19. Sean u y v dos vectores del espacio

   (a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$, $\|u\| = 3$ y que $(u - v)$ es perpendicular a u
   (b) Hallar $\|v\|$ y $\|u + v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$, $\|u\| = 3$ y el ángulo entre $(u + v)$ y u es $\frac{\pi}{6}$
   (c) Hallar $\|u \times v\|$ sabiendo que $\|u\| = 10$, $\|v\| = 2$ y $< u, v >= 12$