Primer Parcial

Duración: 3.5 horas

Deben justificar todas sus respuestas. En caso de utilizar un resultado demostrado en clase, deben enunciarlo y justificar que se puede aplicar en el contexto del problema

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1.

1. Sea $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Además existe $b > 1$ tal que f restricta al intervalo $[b,+\infty)$ es decreciente. Para cada n natural tal que $n \geq 1$ se define $a_n = f(n)$.
   Prueba que la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

2. Sea $f : [2,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^{\alpha}(x)}$, $\alpha > 0$.
   Prueba que f es decreciente.

3. Clasifica, discutiendo según $\alpha > 0$, la serie

$$\sum \frac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}.$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

1. Realiza un bosquejo del gráfico de f (quizás ayude observar sus conjuntos de nivel).

2. Estudia continuidad de f en todo punto de su dominio.

3. Se denota $f^{-1}(A)$ al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in A\}$ al cual se lo conoce como preimagen del conjunto A por f.
   Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que A es el intervalo abierto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Determina $f^{-1}(A)$ (sería bueno que también lo dibujaras). Estudia si es un subconjunto abierto y/o cerrado de $\mathbb{R}^2$; determina su frontera; determina sus puntos de acumulación.

4. Se considera la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ definida por $z_n = (0, 1-1/n)$ si n es par y $z_n = (0, 1+1/n)$ si n es impar. Estudiar convergencia de z_n y de $f(z_n)$.

Solución

Ejercicio 1. 1. Observar que no importa donde arranquen la serie o la integral, esto no afecta la convergencia.

Sea k el primer entero luego de b. Por ser f decreciente, en el intervalo $[n, n+1]$ vale:

$$a_{n+1} = f(n+1) \le f(t) \le f(n) = a_n$$

Integrando: $$a_{n+1} \cdot 1 \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le a_n \cdot 1$$

Sumo desde k hasta n: $$\underbrace{\sum_{i=k}^{n} a_{i+1}}_{= \sum_{i=k+1}^{n+1} a_n} \overset{(*)_1}{\le} \int_k^{n+1} f(t)\,dt \overset{(*)_2}{\le} \sum_{i=k}^{n} a_i$$

Sea $$F(x) = \int_k^{x} f(t)\,dt.$$

• $(\Leftarrow)$ Si $\sum_{k}^{+\infty} a_n$ es convergente entonces $$F(x) = \int_k^{x} f(t)\,dt \le \int_k^{[x]} f(t)\,dt \overset{(*)_2}{\le} \sum_{i=k}^{[x]-1} a_i \le \sum_{i=k}^{+\infty} a_i$$

el entero más próximo

$a_i \ge 0 \ \forall i$

Entonces $F(x)$ está acotada por $\sum_{i=K}^{+\infty} a_n$.

Además $F(x)$ es creciente $(f \ge 0)$ $\Rightarrow$ existe $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_K^{+\infty} f(t)\,dt$.

Esto prueba el directo.

• ($\Leftarrow$) Supongamos que $\int_{K}^{+\infty} f(t)dt$ converge. Sea $S_n = \sum_{i=K+1}^{n} a_n$,

entonces por $\oplus_1$: $S_{n+1} \leq \int_{K}^{n+1} f(t)dt \leq \int_{K}^{+\infty} f(t)dt < +\infty$

$\Rightarrow (S_n)$ está acotada. Como (S_n) es creciente $(a_i \geq 0)$ entonces

existe $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{i=K}^{+\infty} a_n$. //.

2. $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{\ln^{\alpha}(x)}$ son decrecientes, luego, si $y > x$:

$$f(y) = \frac{1}{y}\frac{1}{\ln^{\alpha}(y)} < \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^{\alpha}(y)} < \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^{\alpha}(x)} = f(x)$$

Observar que usamos que $\ln^{\alpha}(x) > 0$, $\ln^{\alpha}(y) > 0$.

Otra opción es ver que $f' < 0$.

3. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^{\alpha}(n)}$ es equivalente (por la parte 1.) a

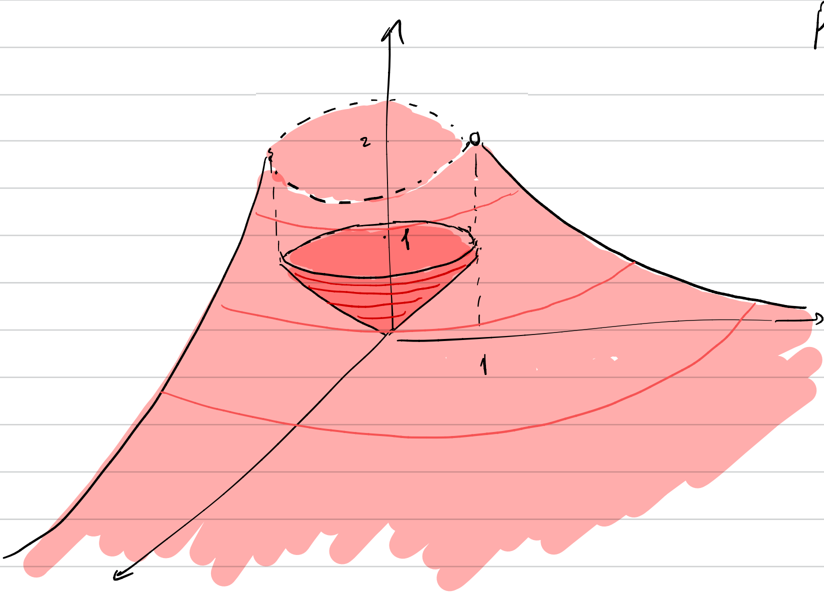
$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha}(x)} dx$; está última la resolvemos con el

C.V $u = \log(x)$: $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha}(x)} dx = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}} < +\infty$ sii $\underline{\alpha > 1}$.

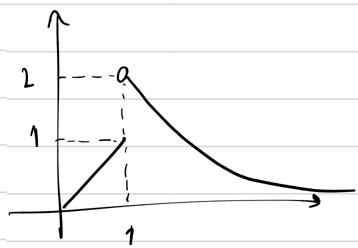
Ejercicio 2:

1. La función en coordenadas polares es $f(r) \overset{(\blacktriangle)}{=} \begin{cases} r & \text{si } r \le 1. \\ \frac{2}{r} & \text{si } r > 1 \end{cases}$

esto ayuda a bosquejarla. Lo que dice es que el gráfico de f es el gráfico de la función de 1 variable ($\blacktriangle$), rotada por el eje z. Es una superficie de revolución. También ayuda a ver esto el hecho de que las curvas de nivel son círculos.



Plano x-z:



2. Fuera de $x^2+y^2=1$ es continua, pues $\sqrt{x^2+y^2}$ lo es y $\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lo es en $x^2+y^2>1$.

Para ver la continuidad en $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$, uso límites.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, si me acerco por puntos de $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$

Un punto con $x_0^2+y_0^2=1$.

el límite da $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = 1.$

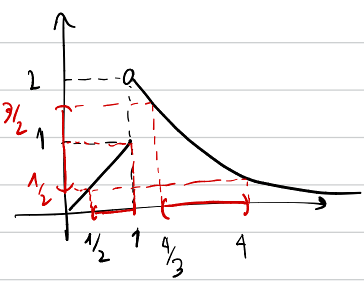
Si lo hago con puntos de $\{(x,y): x^2+y^2>1\}$ entonces da

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = 2.$$

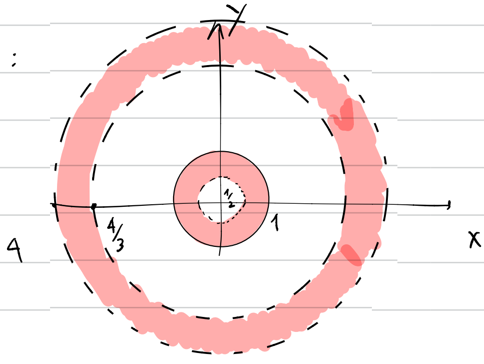
Como los límites no coinciden entonces f no es continua allí.

3. $f^{-1}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, en coord polares, son los puntos con radio en $[1/2, 1] \cup (4/3, 4)$

Entonces $f^{-1}(1/2, 3/2) = \{(x,y): \sqrt{x^2+y^2} \in [1/2, 1] \cup (4/3, 4)\}$



Dibujo:



A

Frontera: $\partial(\overline{f^{-1}(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}) = \{(x,y) : x^2+y^2 = \frac{1}{2}, \text{ o } x^2+y^2 = 1, \text{ o } x^2+y^2=4, \text{ o } x^2+y^2 = \frac{4}{3}\}$.

$A' = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) : \frac{4}{3} \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

- No es cerrado, pues $A' \not\subset A$.
- No es abierto, pues los puntos (x,y) con $x^2+y^2 = 1$ están en el conjunto, pero no son interiores.

4. $z_n \to (0,1)$, sin embargo $f(z_n)$ no converge pues $f(z_{2n}) = f(0, 1-\frac{1}{2n}) \to 1$

$f(z_{2n+1}) = f(0, 1+\frac{1}{2n+1}) \to 2$.