$\boxed{\text{SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL}}$

$\boxed{\text{EJERCICIO (1)}}$

LA FUNCIÓN ESTÁ DEFINIDA EN TODO $\mathbb{R}^2$.

EN TODO PUNTO DISTINTO DEL ORIGEN LA FUCIÓN SE DEFINE COMO:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2},$$

ES DECIR ES PRODUCTO DE FUNCIONES DIFERENCIABLES, UNA DE ELLAS POR SER UN POLINOMIO Y LA OTRA UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DIFERENCIABLES.

QUEDA POR ESTUDIAR EL COMPORTAMIENTO EN EL ORIGEN, PARA ELLO ESTUDIAREMOS LAS DERIV.

PARCIALES.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{h^2}}_{\text{ACOTADO}} = 0.$$

ENTONCES $f_x(0,0) = 0$.

ANALOGAMENTE $f_y(0,0) = 0$.

ESTO NOS PERMITE CON ALGUNA CUENTA EN EL CAMINO OBTENER LAS SIGUIENTES EXPRESIONES PARA LAS DERIVADAS PARCIALES:

$$(*)\quad f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$(**)\quad f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

ESTO RESPONDE LA <u>PARTE a)</u> DEL EJERCICIO.

RESPECTO A LA <u>PARTE b)</u> FALTA OBSERVAR LA DIF. EN EL ORIGEN. PARA ESTO ACUDIMOS A LA DEFINICIÓN.

en este contexto

f es diferenciable en $(0,0)$ si:

$$f(x,y) = \overbrace{f(0,0)}^{=0} + \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}x + \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}y + r(x,y)$$

donde $r(x,y)$ debe verificar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

en este caso

$$r(x,y) = f(x,y).$$

entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{acotado.}}$$

$$= 0$$

POR LO TANTO $f$ ES DIFERENCIABLE EN EL ORIGEN Y POR LO DICHO ANTES $f$ ES DIFERENCIABLE EN TODO $\mathbb{R}^2$, LO CUAL CONCLUYE LA PARTE b).

$f$ ES DE CLASE $C^1$ SI LAS DERIVADAS PARCIALES SON CONTINUAS.

UNA MANERA DE ESTUDIAR LO ANTERIOR ES VER SI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0.$$

(YA QUE EN EL RESTO DE $\mathbb{R}^2$ TODO BIEN)

OBSERVANDO (*) DEBEMOS ESTUDIAR:

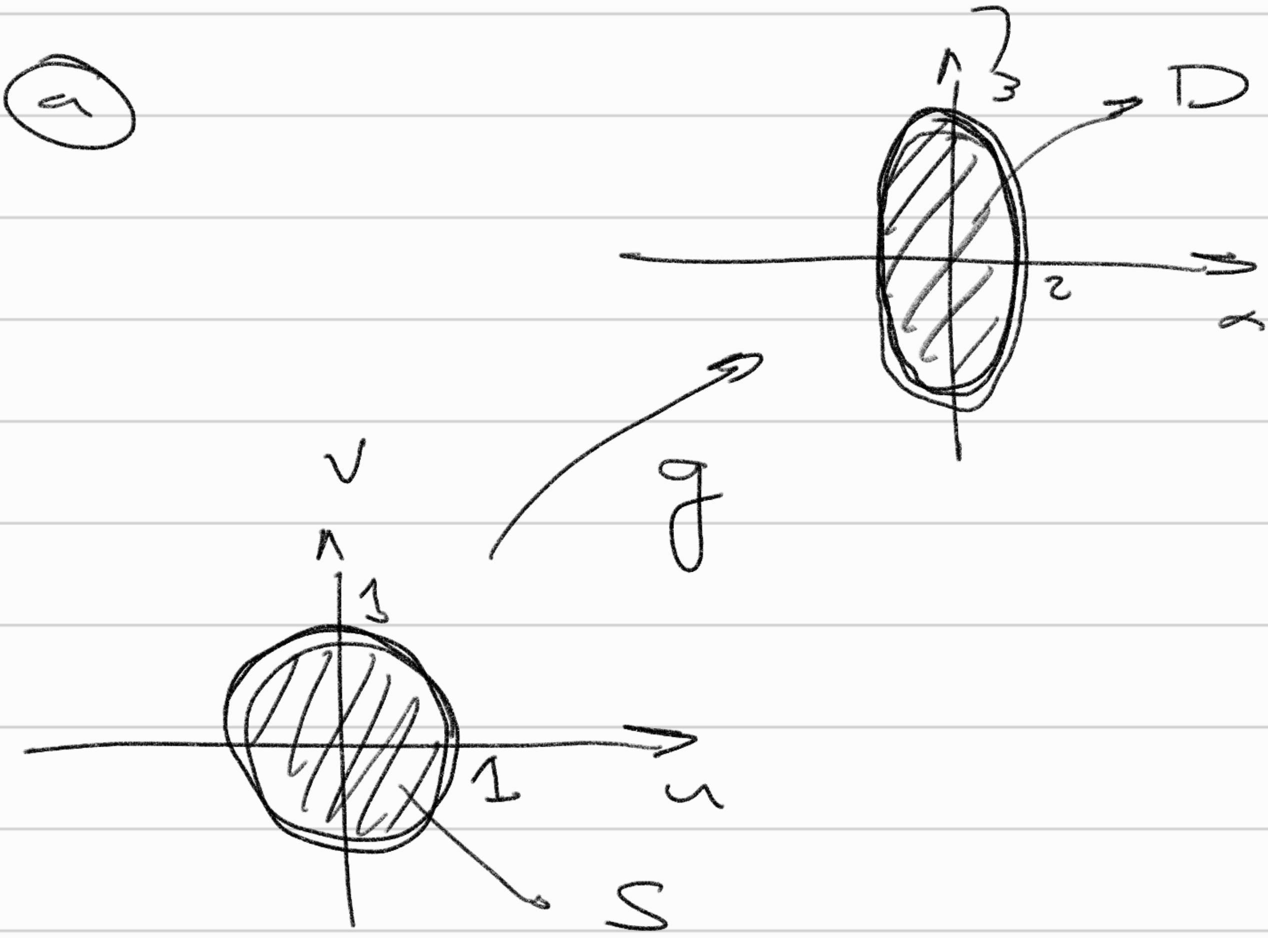
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

El primer término no genera problemas ya que es producto de un factor que tiende a cero por una acotada. Pero el límite del segundo término no existe lo que se puede observar viendo el límite cuando nos restringimos al eje $x$ entonces $f_x$ no es continua en el origen por lo que $f \notin C^1$.

Esto termina el ejercicio 1.

## EJERCICIO 2

a




Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

definida como

$$g(u,v) = (2u, 3v)$$

Es claro que $g$ es

un cambio de variables

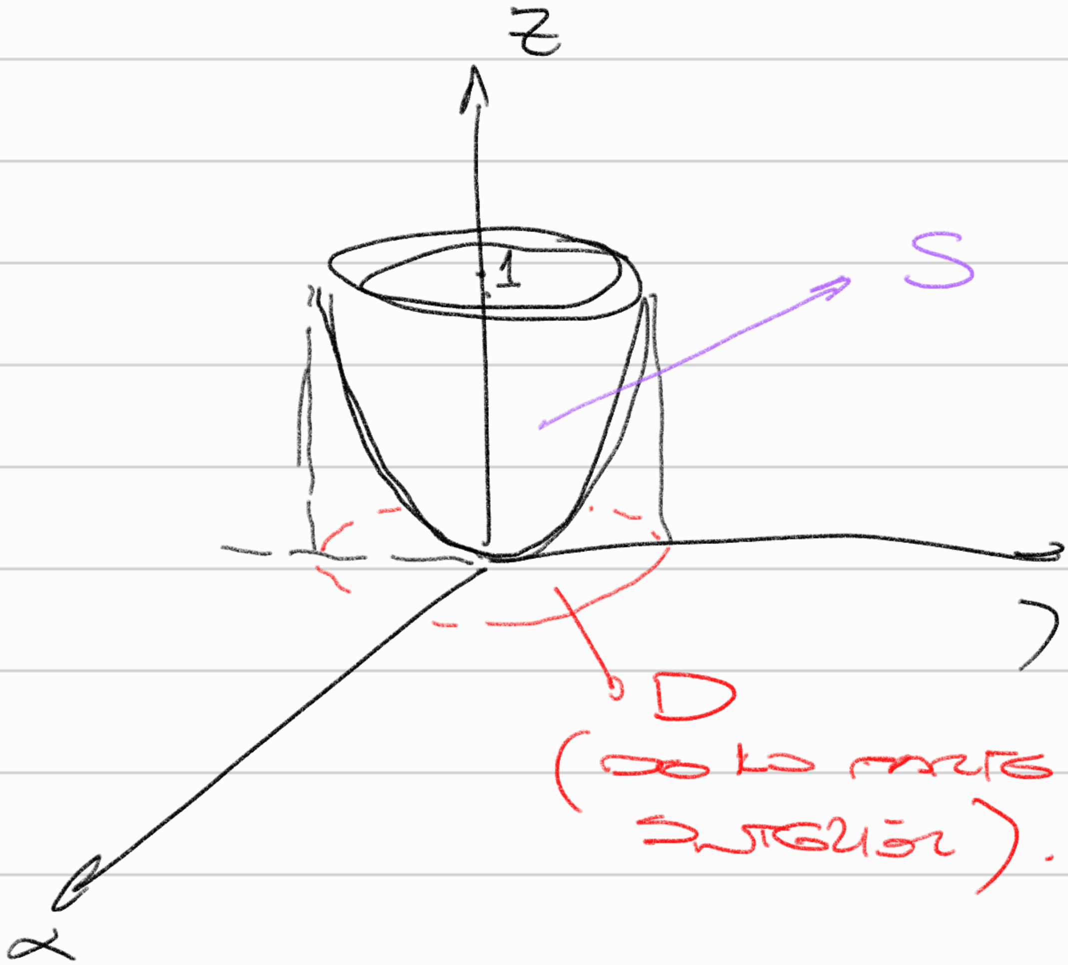
(biyectiva; $g$ y $g^{-1}$

diferenciables)

ADEMÁS $g$ TRANSFORMA $S$ EN $D$.

(b)

(i)




ES CLARO QUE $S$ ES UNA REGIÓN SIMPLE DE $\mathbb{R}^3$

② Para calcular el volumen de $S$:

$$Vol(S) = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz$$

Siendo $S$ simple, podemos aplicar Fubini

$$Vol(S) = \iint_D dx\,dy \int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}^{1} 1 \, dz =$$

$$= \iint_D \left[1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right] dx\,dy$$

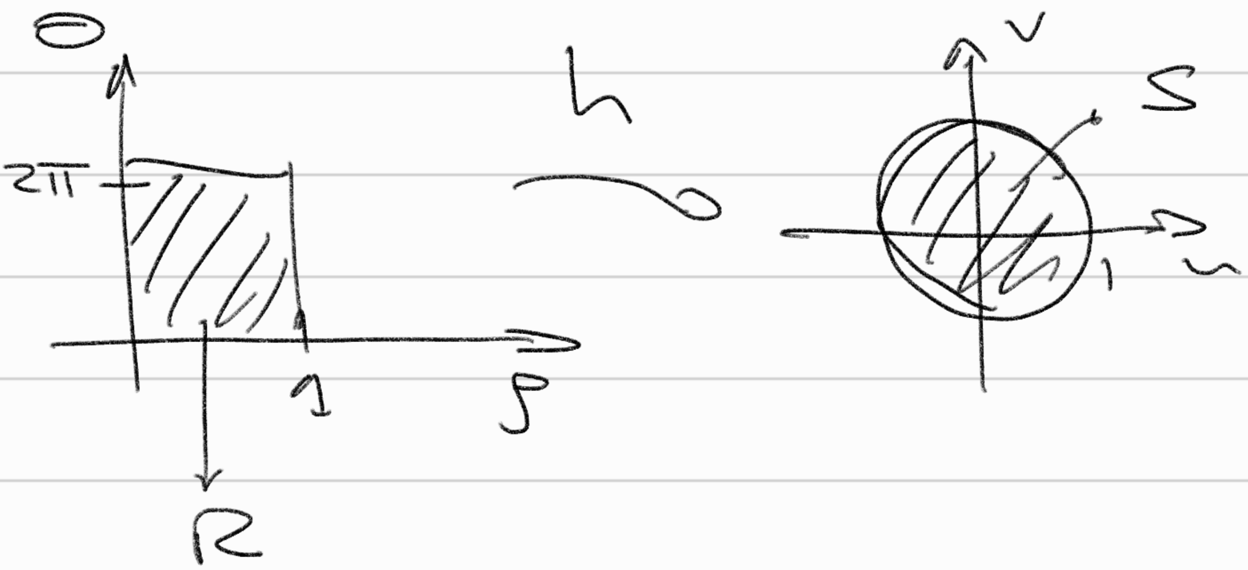
Aprovechamos el cambio de variable de la parte anterior:

$$\text{Vol}(S) = 6 \iint_S \left[1 - (u^2 + v^2)\right] du\, dv$$

SIENDO $S$ EL DISCO DE RADIO UNO.

UTILIZANDO POLARES:

$$h(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$




$$\text{Vol}(S) = 6 \iint_R (1 - \rho^2)\rho \, d\rho\, d\theta$$

$$= 12\pi \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho \, d\rho$$

$$= 12\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 3\pi$$

DE AQUÍ PROSEGUIMOS EN UN CAMINO PARA RESOLVER LA INTEGRAL.