# Concepto de límite

Escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos:

"el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es igual a $L$"

si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

# Concepto de límite

Escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos:

"el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es igual a $L$"

si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

- Observemos que para el límite no es importante lo que ocurra en el punto $a$, $f$ puede valer algo distinto de $L$ o incluso no estar definida.

# Concepto de límite

Escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos:

"el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es igual a $L$"

si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

- Observemos que para el límite no es importante lo que ocurra en el punto $a$, $f$ puede valer algo distinto de $L$ o incluso no estar definida.
- En CDIV se utiliza una definición más formal que veremos un poco más adelante.

# Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^2 - x + 1$ y $a = 1$. Al tomar valores cercanos a 1 y aplicar $f$ veamos que ocurre:

Table:

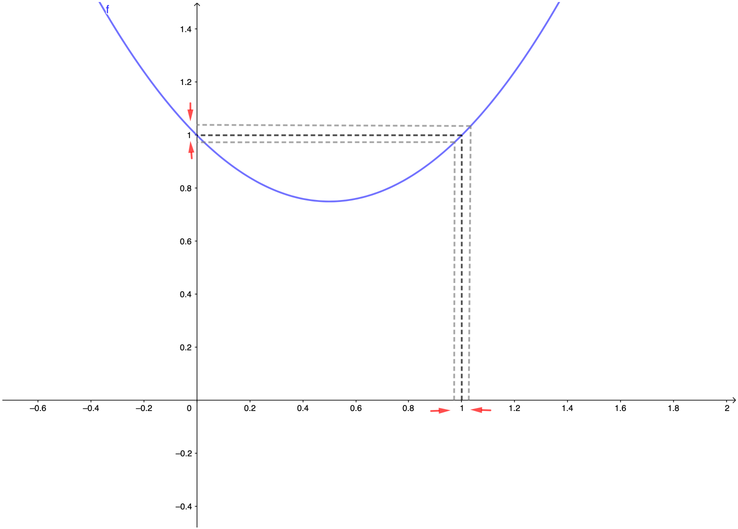
| x | f(x) |
|---|---|
| 0,9 | 0,91 |
| 0,99 | 0,9901 |
| 0,999 | 0,999001 |
| 1,001 | 1.001001 |
| 1,01 | 1,0101 |

Parece que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

# Ejemplo

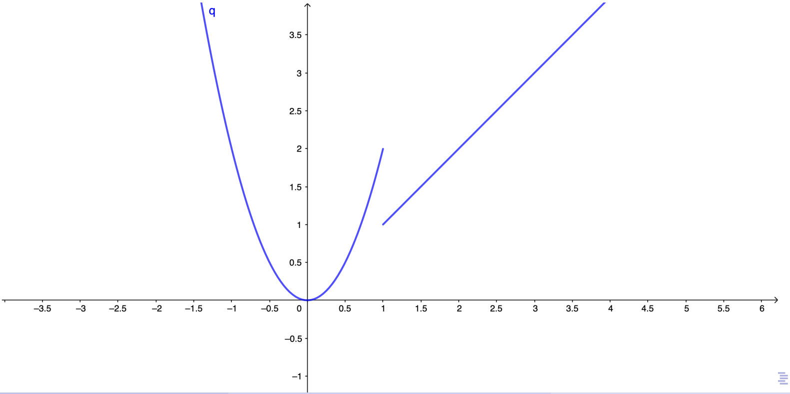
Veamos la gráfica:



# Límites que no existen

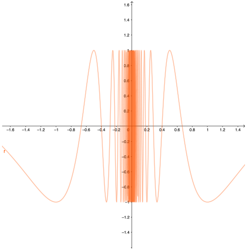
Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

El límite de $g(x)$ en $x = 1$ no existe ya que si nos acercamos desde la izquierda $g(x)$ se acercará a $2$ pero si nos acercamos desde la derecha $g(x)$ se acercará a $1$.



# Límites que no existen

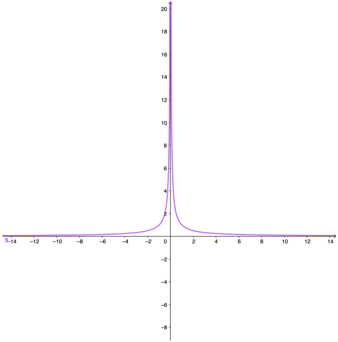
Si consideramos ahora la función $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $h(x) = cos(\frac{\pi}{x})$, queremos ver el límite cuando $x$ tiende a cero, veamos la gráfica:



$\lim_{x\to 0} h(x)$ no existe ya que la función oscila cerca de $0$. Por ejemplo si tomamos $x = \frac{1}{2n}$ entonces $h(\frac{1}{2n}) = cos(\frac{\pi}{\frac{1}{2n}}) = cos(2n\pi) = 1$ para todo $n$ natural y tomando $n$ suficientemente grande $\frac{1}{2n}$ será tan pequeño como querramos.

# Límites infinitos

Sea $q : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = \frac{1}{|x|}$. Queremos investigar el $\lim_{x \to 0} q(x)$. Vemos que a medida que $x$ se acerca a $0$, $q(x)$ se hace cada vez más grande sin importar si es por la derecha o por la izquierda, decimos que $\lim_{x \to 0} q(x) = +\infty$



# Límites laterales

- Escribimos
$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$
y decimos que el "límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$" [o el "límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$ por la izquierda"] es igual a $L$ si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ al tomar $x$ lo suficientemente cerca de $a$ y $x$ menor que $a$.
- De forma análoga definimos
$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$
el límite por la derecha de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$.

# Límites Laterales y Límite

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $p(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ y $a = 1$.

# Límites Laterales y Límite

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $p(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ y $a = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} p(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$$

# Límites Laterales y Límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $p(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ y $a = 1$.

$\lim_{x \to 1^-} p(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x^2 = 2$

y $\lim_{x \to 1^+} p(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2$

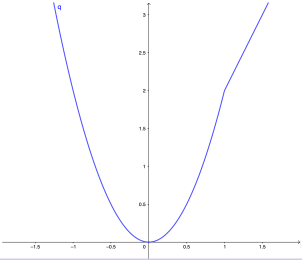
# Límites Laterales y Límite

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $p(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ y $a = 1$.

$\lim_{x\to 1^-} p(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$
y $\lim_{x\to 1^+} p(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2$ por lo tanto $\lim_{x\to 1} p(x) = 2$.



# Definición formal de límite

Dijimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cerca de $a$, pero no igual a $a$.

- Cercanía: entornos o intervalos de $L$ y $a$ respectivamente:

$$f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ y } x \neq a \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta$$

- Arbitrariamente: $\epsilon$ puede tomar cualquier valor $\to \forall\, \epsilon > 0$.
- Suficientemente: basta encontrar un $\delta \to \exists\, \delta > 0$

# Definición formal de límite

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados un punto $a \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $a$, o que $f$ tiene límite $L$ en el punto $a$ cuando:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Obs: $\forall x \in I$ refiere a que estamos mirando los $x$ para los cuales vamos a calcular $f(x)$ así que deben estar en el dominio.

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c.L_1$

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c.L_1$
- $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = L_1 \times L_2$

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c.L_1$
- $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = L_1 \times L_2$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c.L_1$
- $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = L_1 \times L_2$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$
- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L_1^n$ donde $n$ es un entero positivo

# Operaciones con límites

Suponga que $c$ es una constante y que existen (y son finitos) los límites $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$.
Entonces:

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c.L_1$
- $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = L_1 \times L_2$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$
- $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L_1^n$ donde $n$ es un entero positivo
- $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ donde $n$ es un entero positivo
  Si $n$ es par, supondremos que $L_1 > 0$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x \to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim_{x \to a} f^3(x)$
3. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x \to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim_{x \to a} f^3(x)$
3. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

- $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - 2 \lim_{x \to a} g(x) = 7 - 6 = 1$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x \to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim_{x \to a} f^3(x)$
3. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

- $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - 2\lim_{x \to a} g(x) = 7 - 6 = 1$
- $\lim_{x \to a} f^3(x) = (\lim_{x \to a} f(x))^3 = 7^3 = 343$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim\limits_{x\to a} f^3(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 2g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - 2\lim_{x\to a} g(x) = 7 - 6 = 1$
- $\lim\limits_{x\to a} f^3(x) = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^3 = 7^3 = 343$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x) + \sqrt{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = 21 + \sqrt{3}$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x \to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim_{x \to a} f^3(x)$
3. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

- $\lim_{x \to a} [f(x) - 2g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - 2 \lim_{x \to a} g(x) = 7 - 6 = 1$
- $\lim_{x \to a} f^3(x) = (\lim_{x \to a} f(x))^3 = 7^3 = 343$
- $\lim_{x \to a} [f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) + \sqrt{\lim_{x \to a} g(x)} = 21 + \sqrt{3}$

# Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 3$ Hallar:

1. $\lim_{x\to a}[f(x) - 2g(x)]$
2. $\lim_{x\to a} f^3(x)$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}]$

- $\lim_{x\to a}[f(x) - 2g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - 2\lim_{x\to a} g(x) = 7 - 6 = 1$
- $\lim_{x\to a} f^3(x) = (\lim_{x\to a} f(x))^3 = 7^3 = 343$
- $\lim_{x\to a}[f(x)g(x) + \sqrt{g(x)}] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) + \sqrt{\lim_{x\to a} g(x)} = 21 + \sqrt{3}$

# Límites por sustitución

En estos casos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ es directamente $f(a)$ (funciones continuas)

Ejemplos:

- $\lim_{x \to 1} x^3 - 3x + 2 = 1^3 - 3.1 + 2 = 0$
- $\lim_{x \to 0} e^x - 3 = e^0 - 3 = -2$

# Límites por cancelación de factor común

Si consideramos un cociente de polinomios con una raíz en común $\alpha$ y queremos el límite de este cociente cuando $x$ tiende a $\alpha$ podemos cancelar los términos $(x-\alpha)$ de ambos polinomios y luego sustituir.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$$

# Límite por racionalización

En este tipo de límites tenemos algo de la forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y la técnica es multiplicar y dividir por $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ utilizando que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

Ejemplo:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{(\sqrt{t^2 + 9} - 3)(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 9 - 9}{(\sqrt{t^2 + 9} + 3)t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \frac{1}{6}$$

# Acotado por cero

Si tenemos un límite de la forma $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ con:

- $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y
- $g(x)$ acotada (en un entorno de $a$)

entonces

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$$

Ejemplo: calcular $\lim_{x \to 0} x \sin(x)$.

# Acotado por cero

Si tenemos un límite de la forma $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ con:

- $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y
- $g(x)$ acotada (en un entorno de $a$)

entonces

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$$

Ejemplo: calcular $\lim_{x \to 0} x \sin(x)$.

Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ y $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ entonces $\lim_{x \to 0} x \sin(x) = 0$.