La gráfica de la función $f + g$ puede obtenerse de las gráficas de f y g por **suma gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas y correspondientes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Uso de suma gráfica

Las gráficas de f y g se muestran en la Figura 1. Use suma gráfica para graficar la función de $f + g$.

SOLUCIÓN Obtenemos la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se ve en la Figura 2. Esto se implementa al copiar el segmento de recta PQ sobre el de PR para obtener el punto S en la gráfica de $f + g$.

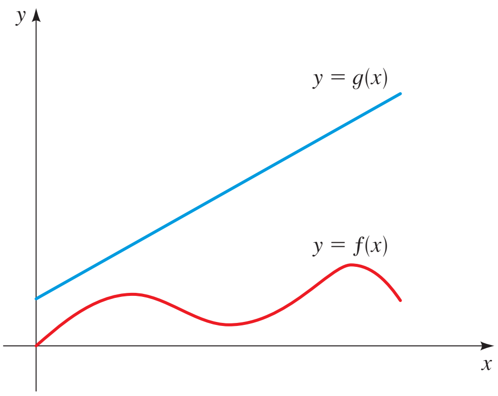


FIGURA 1

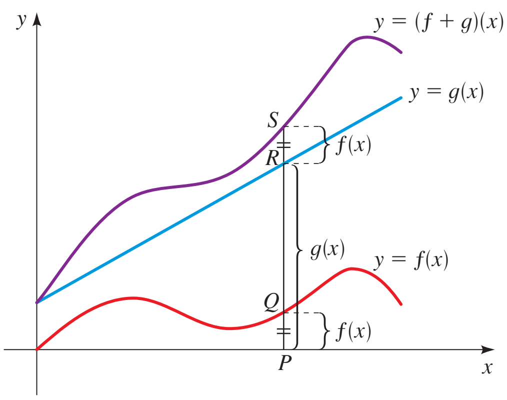


FIGURA 2 Suma gráfica

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Composición de funciones

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Podemos definir una nueva función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está formada por las funciones f y g en una forma interesante: dado un número x, primero le aplicamos la función g y luego aplicamos f al resultado. En este caso, f es la regla "tome la raíz cuadrada", g es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1", y h es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1, luego tome la raíz cuadrada". En otras palabras, obtenemos la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. La Figura 3 muestra un diagrama de máquina para h

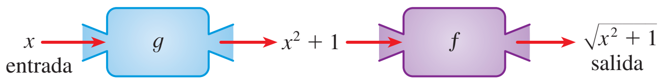


FIGURA 3 La máquina h está compuesta de la máquina g (primero) y luego por la máquina f.

En general, dadas dos funciones f y g cualesquiera, empezamos con un número x en el dominio de g y su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, podemos entonces calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir g en f. Se denomina la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota con $f \circ g$ ("f compuesta con g").

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estén definidas. Podemos describir $f \circ g$ usando un diagrama de flechas (Figura 4).

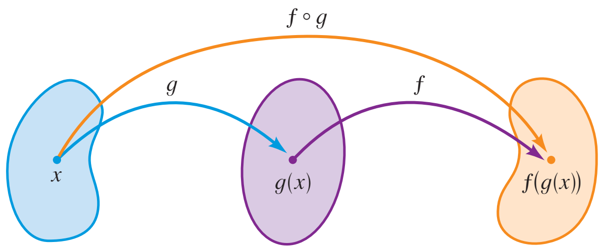


FIGURA 4 Diagrama de flechas para $f \circ g$

EJEMPLO 3 | Hallar la composición de funciones

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

(a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

(b) Encuentre $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "reste 3". La función $f \circ g$ primero resta 3 y luego eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ primero eleva al cuadrado y luego resta tres.

(a) Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x-3) && \text{Definición de } g \\ &= (x-3)^2 && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(x^2) && \text{Definición de } f \\ &= x^2 - 3 && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Los dominios tanto de $f \circ g$ como de $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

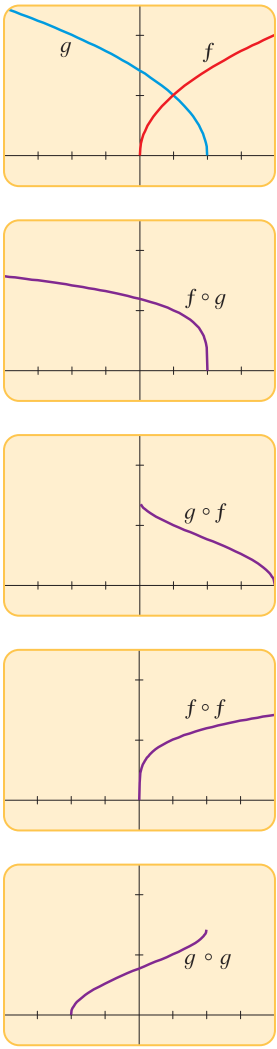
(b) Tenemos

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$
$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **35**

Del Ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ quiere decir que la función g se aplica primero y luego f se aplica en segundo lugar.

Las gráficas de f y g del Ejemplo 4, así como las de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones que son bastante diferentes de las funciones originales.



EJEMPLO 4 | Hallar la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{\sqrt{2-x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{2-x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\ &= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, debemos tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o $x \leq 4$. Entonces, tenemos $0 \leq x \leq 4$ de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f\\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g\\ &= g(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2-x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Esta expresión está definida cuando$2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad quiere decir que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por tanto, $-2 \leq x \leq 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41** ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar h primero, después g y luego f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 5 | Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h\\ &= f(g(x+3)) && \text{Definición de } h\\ &= f((x+3)^{10}) && \text{Definición de } g\\ &= \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

Hasta este punto hemos empleado composición para construir funciones complicadas a partir de unas más sencillas, pero, en cálculo, es útil saber "descomponer" una función complicada en unas más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 | Reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

SOLUCIÓN Como la fórmula de F dice que primero sumamos 9 y luego tomamos la raíz cuarta, hacemos

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Y a continuación

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x + 9) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f \\ &= F(x) \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

EJEMPLO 7 | Una aplicación de composición de funciones

Un barco está navegando a 20 mi/h paralelo a un borde recto de la playa. El barco está a 5 millas de la playa y pasa frente a un faro al mediodía.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como función de d, la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

(b) Exprese d como función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre g para que $d = g(t)$.

(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

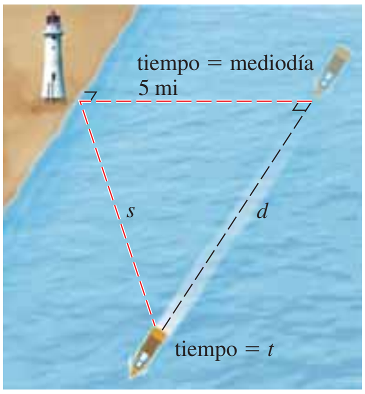


FIGURA 5

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como el de la Figura 5.

(a) Podemos relacionar las distancias s y d por el Teorema de Pitágoras. Así, s puede ser expresada como función de d por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

(b) Como el barco está navegando a 20 mi/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

distancia = rapidez × tiempo

$$d = g(t) = 20t$$

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(20t) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como función del tiempo.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **63**

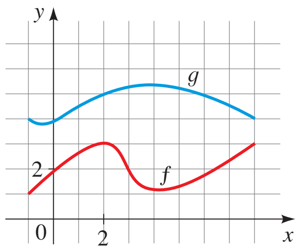
2.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. De las gráficas de f y g de la figura, encontramos

$(f + g)(2) =$ ______ $\quad (f - g)(2) =$ ______

$(fg)(2) =$ ______ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(2) =$ ______



2. Por definición, $f \circ g(x) =$ ____. Por tanto, si $g(2) = 5$ y $f(5) = 12$, entonces $f \circ g(2) =$ ______.

3. Si la regla de la función f es "sumar 1" y la regla de la función g es "multiplicar por 2," entonces la regla de $f \circ g$ es

"______________________"

y la regla de $g \circ f$ es

"______________________"

4. Podemos expresar algebraicamente las funciones del Ejercicio 3 como

$f(x) =$ ______ $\quad g(x) =$ ______

$f \circ g(x) =$ ______ $\quad g \circ f(x) =$ ______

HABILIDADES

5-10 ■ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

5. $f(x) = x - 3, \quad g(x) = x^2$

6. $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

7. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x}$

8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{4}{x + 4}$

10. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

11-14 ■ Encuentre el dominio de la función.

11. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

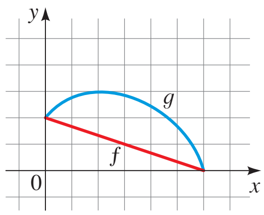
12. $g(x) = \sqrt{x + 1} - \dfrac{1}{x}$

13. $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$

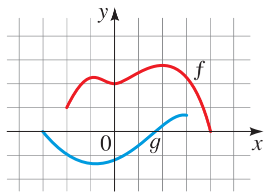
14. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

15-16 ■ Use suma gráfica para trazar la gráfica de $f + g$.

15.



16.



17-20 ■ Trace las gráficas de f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

17. $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

18. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

19. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3$

20. $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

21-26 ■ Use $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ para evaluar la expresión.

21. **(a)** $f(g(0))$ **(b)** $g(f(0))$

22. **(a)** $f(f(4))$ **(b)** $g(g(3))$

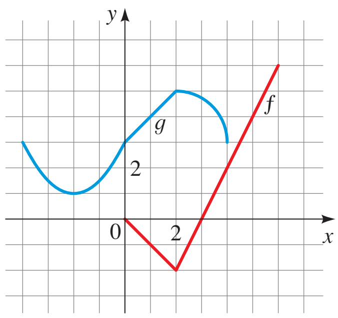
23. **(a)** $(f \circ g)(-2)$ **(b)** $(g \circ f)(-2)$

24. **(a)** $(f \circ f)(-1)$ **(b)** $(g \circ g)(2)$

25. **(a)** $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$

26. **(a)** $(f \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ g)(x)$

27-32 ■ Use las gráficas dadas de f y g para evaluar la expresión.



27. $f(g(2))$

28. $g(f(0))$

29. $(g \circ f)(4)$

30. $(f \circ g)(0)$

31. $(g \circ g)(-2)$

32. $(f \circ f)(4)$

33-44 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

33. $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 4x - 1$

34. $f(x) = 6x - 5, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$

35. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$

36. $f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = 2x + 4$

38. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

39. $f(x) = |x|, \quad g(x) = 2x + 3$

40. $f(x) = x - 4, \quad g(x) = |x + 4|$

41. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = 2x - 1$

42. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x^2 - 4x$

43. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

45-48 ■ Encuentre $f \circ g \circ h$.

45. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x - 1$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^2 + 2$

47. $f(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x - 5, \quad h(x) = \sqrt{x}$

48. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

49-54 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g$.

49. $F(x) = (x - 9)^5$

50. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

51. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

52. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

53. $H(x) = |1 - x^3|$

54. $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

55-58 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

55. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

56. $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

57. $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$

58. $G(x) = \dfrac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

APLICACIONES

59-60 ■ **Ingreso, costo y utilidad** Un taller de imprenta hace calcomanías para pegarse en los parachoques de autos para campañas políticas. Si x calcomanías son solicitadas (donde $x < 10{,}000$) entonces el precio por calcomanía es $0.15 - 0.000002x$ dólares, y el costo total por producir el pedido es $0.095x - 0.0000005x^2$ dólares.

59. Use el hecho de que

$$\text{ingreso} = \text{precio por artículo} \times \text{número de artículos vendidos}$$

para expresar $R(x)$, el ingreso por un pedido de x calcomanías, como producto de dos funciones de x.

60. Use el hecho de que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

para expresar $P(x)$, la utilidad de un pedido de x calcomanías, como diferencia de dos funciones de x.

61. **Área de una onda** Se deja caer una piedra en un lago, creando una onda circular que se mueve hacia fuera con una rapidez de 60 cm/s.

(a) Encuentre una función g que modele el radio como función del tiempo.

(b) Encuentre una función f que modele el área del círculo como función del radio.

(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

62. **Inflar un globo** Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 1 cm/s.

(a) Encuentre una función f que modele el radio como función del tiempo.

(b) Encuentre una función g que modele el volumen como función del radio.

(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

63. **Área de un globo** Un globo esférico de meteorología está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como función del tiempo t (en segundos).

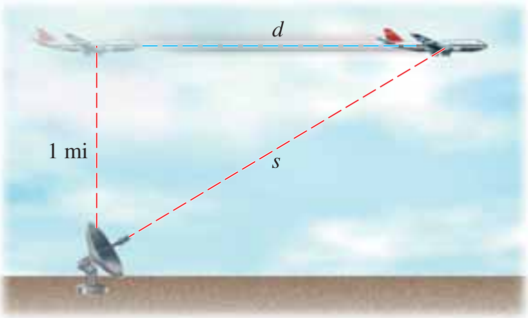
64. **Descuentos múltiples** Una persona tiene un cupón de \$50 del fabricante, bueno para la compra de un teléfono celular. La tienda donde compra el teléfono está ofreciendo un 20% de descuento en todos los teléfonos celulares. Represente con x el precio regular del teléfono celular.

(a) Suponga que sólo aplica el 20% de descuento. Encuentre una función que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio regular x.

(b) Suponga que sólo aplica el cupón de \$50. Encuentre una función g que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio x de la etiqueta.
(c) Si se puede usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es ya sea $f \circ g(x)$ o $g \circ f(x)$, dependiendo del pedido en el que se aplique el precio. Encuentre $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Cuál composición da el precio más bajo?

65. Descuentos múltiples Un distribuidor de aparatos electrodomésticos anuncia un 10% de descuento en todas sus máquinas lavarropas. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$100 sobre la compra de una lavarropas. Represente con x el precio de la etiqueta de la máquina lavarropas.
(a) Suponga que sólo aplica el 10% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio x de etiqueta.
(b) Suponga que sólo aplica el descuento de \$100. Encuentre una función g que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio x de etiqueta.
(c) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?

66. Trayectoria de un avión Un avión está volando con una rapidez de 350 mi/h a una altitud de 1 milla. El avión pasa directamente arriba de una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
(a) Exprese la distancia s (en millas) entre el avión y la estación de radar como función de la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado.
(b) Exprese d como función del tiempo t (en horas) que el avión ha volado.
(c) Use composición para expresar s como función de t.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

67. Interés compuesto Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si una persona invierte x dólares en esa cuenta, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir,

$$A(x) = x + 0.05x = 1.05x$$

Encuentre

$$A \circ A$$
$$A \circ A \circ A$$
$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que la persona obtiene cuando capitalice n copias de A.

68. Composición de funciones lineales Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1 x + b_1$$
$$g(x) = m_2 x + b_2$$

son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. ¿Es una recta de la gráfica $f \circ g$? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

69. Despejar una función desconocida de una ecuación Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$
$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense en qué operaciones tendrá que efectuar en la fórmula de g para terminar con la fórmula de h.) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$
$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Utilice la misma clase de razonamiento para hallar una función g tal que $f \circ g = h$.

70. Composiciones de funciones impares y pares Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si g es una función par, ¿h es necesariamente par? Si g es impar, ¿h es impar? ¿Qué pasa si g es par y f es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es par?

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Iteración y caos**

En este proyecto exploramos el proceso de componer repetidamente una función consigo misma; el resultado puede ser regular o caótico. Usted puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

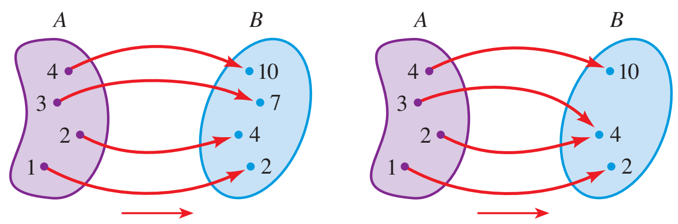
2.7 Funciones uno a uno y sus inversas

Funciones uno a uno ▶ La inversa de una función ▶ Graficar la inversa de una función

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno.*

▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.



f es uno a uno

g no es uno a uno

FIGURA 1

> **DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO**
>
> Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,
>
> $$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

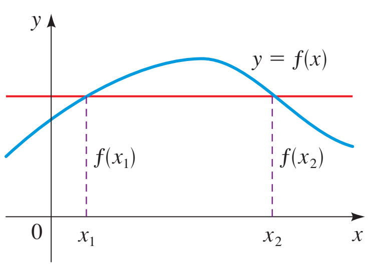


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

> **PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL**
>
> Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

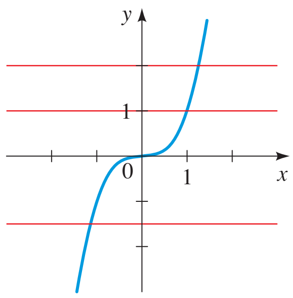


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Observe que la función f del Ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno.*

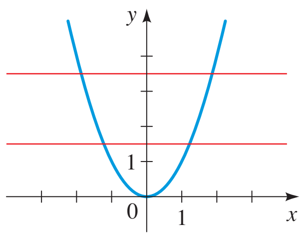


FIGURA 4 $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, g no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Aun cuando la función g del Ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

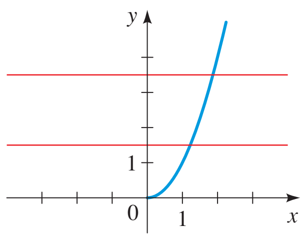


FIGURA 5 $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ es uno a uno.

EJEMPLO 3 | Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

SOLUCIÓN Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \qquad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \qquad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

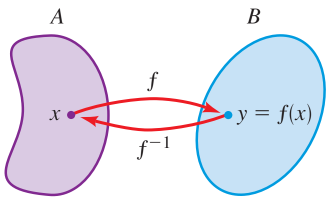


FIGURA 6

Esta definición dice que si f toma x por y, entonces f^{-1} regresa y a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición tenemos

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

No confunda el -1 de f^{-1} por un exponente.

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

EJEMPLO 4 | Hallar f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, hallar $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(5) &= 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5 \\ f^{-1}(7) &= 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7 \\ f^{-1}(-10) &= 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10 \end{aligned}$$

La Figura 7 muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

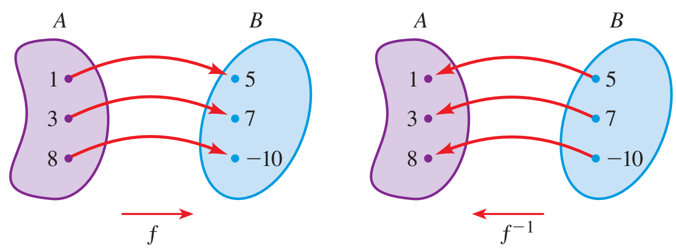


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Por definición, la función inversa f^{-1} deshace lo que f hace: si empezamos con x, aplicamos f y luego aplicamos f^{-1}, llegamos otra vez a x, donde empezamos. Análogamente, f deshace lo que f^{-1} hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f. Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } B \end{aligned}$$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f.

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1}, de modo que decimos que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

EJEMPLO 5 | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

SOLUCIÓN Observe que el dominio y rango de f y de g es $\mathbb{R}$. Tenemos

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por lo tanto, por la Propiedad de Funciones Inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si $y = f(x)$ y si podemos despejar x de esta ecuación en términos de y, entonces debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si entonces intercambiamos x y y, tenemos $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar x y y primero y luego despejar y en términos de x.

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Multiplique por 3, luego reste 2", mientras que f^{-1} es la regla "Sume 2, luego divida entre 3".

EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación.

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$
$$x = \frac{y + 2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente, intercambiamos x y y.

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x - 2) \\ &= \frac{(3x - 2) + 2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x + 2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 \\ &= x + 2 - 2 = x \end{aligned}$$ ✔

EJEMPLO 7 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x.

$$y = \frac{x^5 - 3}{2} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$2y = x^5 - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x^5 = 2y + 3 \qquad \text{Sume 3 (y cambie lados)}$$

$$x = (2y + 3)^{1/5} \qquad \text{Tome raíz quinta de cada lado}$$

A continuación intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53 ■

En el Ejemplo 7, observe que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "Multiplique por 2, sume 3, luego tome la quinta potencia".

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\ &= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\ &= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \quad ✔ \end{aligned}$$

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

Las funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

EJEMPLO 8 | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (2x + 3)/(x - 1)$ y despejamos x.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$y(x - 1) = 2x + 3 \qquad \text{Multiplique por } x - 1$$

$$yx - y = 2x + 3 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$yx - 2x = y + 3 \qquad \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo}$$

$$x(y - 2) = y + 3 \qquad \text{Factorice } x$$

$$x = \frac{y + 3}{y - 2} \qquad \text{Divida entre } y - 2$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45 ■

▼ Graficar la inversa de una función

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del punto (a, b) al reflejar en la recta $y = x$ (vea la Figura 8 en la página siguiente). Por lo tanto, como lo ilustra la Figura 9 de la página siguiente, lo siguiente es verdadero.

> La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

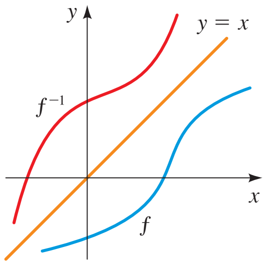


FIGURA 8

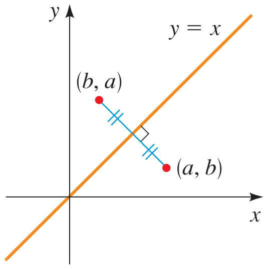


FIGURA 9

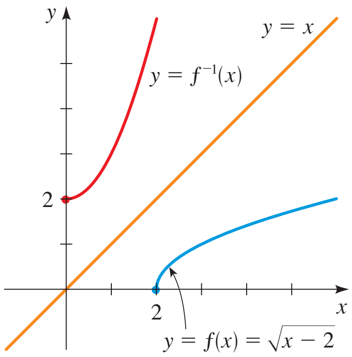


FIGURA 10

EJEMPLO 9 | Graficar la inversa de una función

(a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(b) Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}.

(c) Encuentre la ecuación de f^{-1}.

SOLUCIÓN

(a) Usando las transformaciones desde la Sección 2.5, trazamos la gráfica de $y = \sqrt{x-2}$ al hallar los puntos de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) de la Sección 2.2) y moverla a la derecha 2 unidades.

(b) La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f de la parte (a) al reflejarla en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 10.

(c) De la ecuación $y = \sqrt{x-2}$ despeje x, observando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada uno de los lados}$$

$$x = y^2 + 2 \qquad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

Intercambie x y y:

$$y = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$$

Por lo tanto $\qquad f^{-1}(x) = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la Figura 10, esto parece razonable.

En el Ejemplo 9 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la reglas "Reste 2, luego tome la raíz cuadrada," en tanto que f^{-1} es la regla "Eleve al cuadrado, luego reste 2."

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

2.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una función f es uno a uno si diferentes entradas producen ______salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la Prueba de la _______ _________.

2. **(a)** Para que una función tenga una inversa, debe ser _______. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3$$

(b) ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en la parte (a)?

3. Una función f tiene la siguiente descripción verbal: "Multiplique por 3, sume 5, y luego tome la tercera potencia del resultado".

(a) Escriba una descripción verbal para f^{-1}.

(b) Encuentre fórmulas algebraicas que expresen f y f^{-1} en términos de la entrada x.

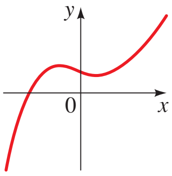
4. *¿Verdadero o falso?*

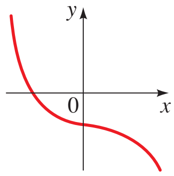
(a) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es lo mismo que $\dfrac{1}{f(x)}$.

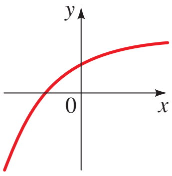
(b) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.

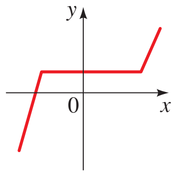
HABILIDADES

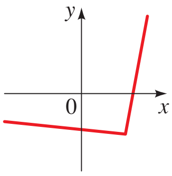
5-10 ■ Nos dan la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno.

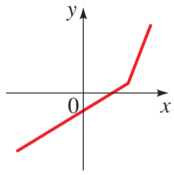
5.


6.


7.


8.


9.


10.


11-20 ■ Determine si la función es uno a uno.

11. $f(x) = -2x + 4$ **12.** $f(x) = 3x - 2$

13. $g(x) = \sqrt{x}$ **14.** $g(x) = |x|$

15. $h(x) = x^2 - 2x$ **16.** $h(x) = x^3 + 8$

17. $f(x) = x^4 + 5$

18. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \le x \le 2$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **20.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

21-22 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

21. **(a)** Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.
(b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

22. **(a)** Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.
(b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

23. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

24. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \ge -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

25-36 ■ Use la Propiedad de la Función Inversa para demostrar que f y g son inversas entre sí.

25. $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

26. $f(x) = 3x; \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

27. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x + 5}{2}$

28. $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

30. $f(x) = x^5; \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

31. $f(x) = x^2 - 4, \quad x \ge 0;$
$g(x) = \sqrt{x + 4}, \quad x \ge -4$

32. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x - 1)^{1/3}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x \ne 1; \quad g(x) = \dfrac{1}{x} + 1, \quad x \ne 0$

34. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2;$
$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2$

35. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}; \quad g(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x - 5}{3x + 4}; \quad g(x) = \dfrac{5 + 4x}{1 - 3x}$

37-60 ■ Encuentre la función inversa de f.

37. $f(x) = 2x + 1$ **38.** $f(x) = 6 - x$

39. $f(x) = 4x + 7$ **40.** $f(x) = 3 - 5x$

41. $f(x) = 5 - 4x^3$ **42.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ **44.** $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

45. $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}$ **46.** $f(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$

47. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 7}$ **48.** $f(x) = \dfrac{4x - 2}{3x + 1}$

49. $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$ **50.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$

51. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$ **52.** $f(x) = x^2 + x, \quad x \ge -\frac{1}{2}$

53. $f(x) = 4 - x^2, \quad x \ge 0$ **54.** $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

55. $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$ **56.** $f(x) = (2 - x^3)^5$

57. $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$

58. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad 0 \le x \le 3$

59. $f(x) = x^4, \quad x \ge 0$ **60.** $f(x) = 1 - x^3$

61-64 ■ Nos dan una función f. **(a)** Trace la gráfica de f. **(b)** Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}. **(c)** Encuentre f^{-1}.

61. $f(x) = 3x - 6$ **62.** $f(x) = 16 - x^2, \quad x \ge 0$

63. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **64.** $f(x) = x^3 - 1$

65-70 ■ Trace la gráfica de f y úsela para determinar si la función es uno a uno.

65. $f(x) = x^3 - x$ **66.** $f(x) = x^3 + x$

67. $f(x) = \dfrac{x + 12}{x - 6}$ **68.** $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

69. $f(x) = |x| - |x - 6|$ **70.** $f(x) = x \cdot |x|$

71-74 ■ Nos dan una función uno a uno. **(a)** Encuentre la inversa de la función. **(b)** Grafique ambas funciones y su inversa en la misma pantalla para verificar que las gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

71. $f(x) = 2 + x$

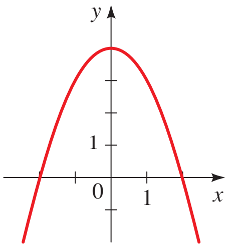
72. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

73. $g(x) = \sqrt{x + 3}$

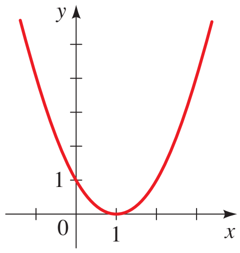
74. $g(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

75-78 ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio para que la función resultante *sea* uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

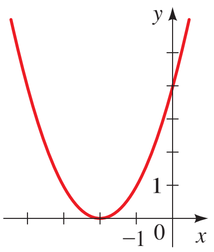
75. $f(x) = 4 - x^2$



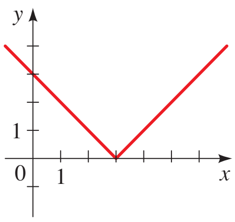
76. $g(x) = (x - 1)^2$



77. $h(x) = (x + 2)^2$

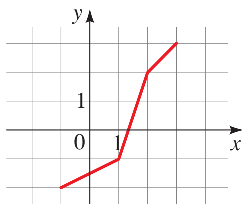


78. $k(x) = |x - 3|$

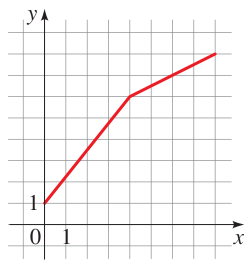


79-80 ■ Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}.

79.



80.



APLICACIONES

81. Tarifa por un servicio Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de retención de \$500 más \$80 por hora. Represente con x el número de horas que el investigador emplea trabajando en un caso.

(a) Encuentre una función que modele la tarifa del investigador como función de x.

(b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

(c) Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

82. Ley de Torricelli Un tanque contiene 100 galones de agua que se drena por una fuga del fondo y hace que el tanque se vacíe en 40 minutos. La Ley de Torricelli da el volumen del agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

(a) Encuentre V^{-1}. ¿Qué representa V^{-1}?

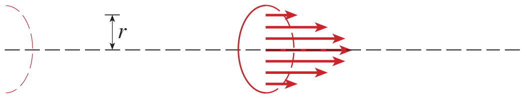
(b) Encuentre $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

83. Circulación sanguínea Cuando la sangre se mueve en una vena o arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia r desde el eje central (vea la figura siguiente). Para una arteria con radio 0.5 cm, v (en cm/s) está dada como función de r (en cm)

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2)$$

(a) Encuentre v^{-1}. ¿Qué representa v^{-1}?

(b) Encuentre $v^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?



84. Función de demanda La cantidad de una mercancía que se vende recibe el nombre de *demanda* de esa mercancía. La demanda D de cierta mercancía es función del precio dado por

$$D(p) = -3p + 150$$

(a) Encuentre D^{-1}. ¿Qué representa D^{-1}?

(b) Encuentre $D^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

85. Escalas de temperatura La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(a) Encuentre F^{-1}. ¿Qué representa F^{-1}?

(b) Encuentre $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

86. Tasas de cambio El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando este problema se escribió, un dólar canadiense valía 1.0573 dólares de Estados Unidos.

(a) Encuentre una función f que dé el valor del dólar de Estados Unidos $f(x)$ de x dólares canadienses.

(b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

(c) ¿Cuánto dinero canadiense valdrían \$12,250 en dólares de Estados Unidos?

87. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre ingresos iguales o menores a € 20,000 es 10%. Para ingresos mayores a €20,000, el impuesto es €2000 más 20% de la cantidad que pase de €20,000.

(a) Encuentre una función f que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso x. Exprese f como función definida por tramos.

(b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

(c) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de €10,000?

88. Descuentos múltiples Un distribuidor de autos anuncia un 15% de descuento en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$1000 en la compra de un auto nuevo. Con x represente el precio de etiqueta del auto.

(a) Suponga que aplica sólo el 15% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x.

(b) Suponga que aplica sólo el descuento de \$1000. Encuentre una función g que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x.
(c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.
(d) Encuentre H^{-1}. ¿Qué representa H^{-1}?
(e) Encuentre $H^{-1}(13{,}000)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

89. Costo de una pizza Marcello's Pizza cobra un precio base de \$7 por una pizza grande más \$2 por cada aderezo o guarnición. Así, si una persona ordena una pizza grande con x aderezos, el precio de su pizza está dado por la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

90. Determinar cuándo una función lineal tiene inversa Para que la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

91. Hallar una inversa "mentalmente" En las notas al margen de esta sección señalamos que se puede hallar la inversa de una función con sólo invertir las operaciones que forman la función. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 vimos que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

porque la "inversa" de "Multiplique por 3 y reste 2" es "Sume 2 y divida entre 3". Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{5}$ **(b)** $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ **(d)** $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? Si es así, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil este trabajo.

92. La función identidad La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Demuestre que para cualquier función f tenemos $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que la función identidad I se comporta para funciones y composición igual que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

93. Despejar una función incógnita de una ecuación En el Ejercicio 69 de la Sección 2.6 se pidió al estudiante resolviera ecuaciones en las que las incógnitas eran funciones. Ahora que ya sabemos de inversas y la función identidad (vea Ejercicio 92), podemos usar álgebra para resolver esas ecuaciones. Por ejemplo, para despejar la función incógnita f de $f \circ g = h$, efectuamos los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} f \circ g &= h && \text{Problema: despejar } f \\ f \circ g \circ g^{-1} &= h \circ g^{-1} && \text{Componer con } g^{-1} \text{ en la derecha} \\ f \circ I &= h \circ g^{-1} && \text{Porque } g \circ g^{-1} = I \\ f &= h \circ g^{-1} && \text{Porque } f \circ I = f \end{aligned}$$

Entonces la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para despejar la función desconocida indicada de la ecuación $f \circ g = h$.
(a) Despeje f, donde $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.
(b) Despeje y, donde $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

CAPÍTULO 2 | REPASO

▪ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Defina verbalmente cada concepto. (Verifique consultando la definición del texto.)
(a) Función
(b) Dominio y rango de una función
(c) Gráfica de una función
(d) Variables independientes y dependientes

2. Trace manualmente, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
(a) $f(x) = x$ **(b)** $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ **(d)** $j(x) = x^4$

3. (a) Exprese la Prueba de la Recta Vertical.
(b) Exprese la Prueba de la Recta Horizontal.

4. ¿Cómo se define la rapidez de cambio promedio de la función f entre dos puntos?

5. ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de cambio promedio de una función lineal?

6. Defina verbalmente cada concepto.
(a) Función creciente
(b) Función decreciente
(c) Función constante

7. Suponga que nos dan la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtenga de la gráfica de f como sigue.
(a) Desplazar 3 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 3 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 3 unidades a la derecha.
(d) Desplazar 3 unidades a la izquierda.
(e) Reflejar en el eje x.
(f) Reflejar en el eje y.
(g) Contraer verticalmente en un factor de 3.
(h) Contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$.
(i) Alargar verticalmente en un factor de 2.
(j) Alargar verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$.