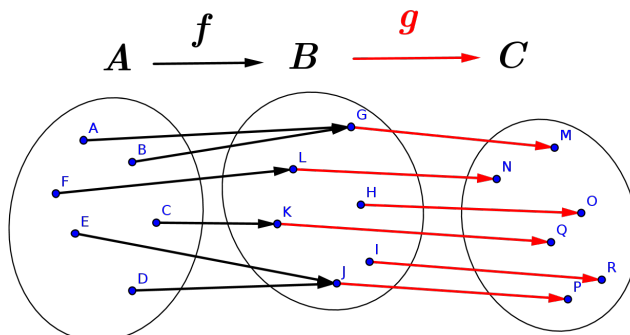




Práctico 6: Composición e Inversa de funciones



Ejercicio 1 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones dadas por el siguiente diagrama



Determinar $g \circ f$.

Ejercicio 2 Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

1. a) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + x + 4$, $g(x) = \cos(x)$
c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{x}{x^4 + 5}$
2. a) $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = |2x|$
b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max\{1, x - 1\}$
c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 3 Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 1$.
2. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log(x)$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x - 1$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ y $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Ejercicio 4 Para las funciones f , g y $g \circ f$, del Ejercicio 2 determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Ejercicio 5 Consideremos las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $i(x) = x^2$.

a) ¿Son todas las funciones iguales? Justificar.

b) Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

Ejercicio 6 Determinar para las siguientes funciones $f : A \rightarrow B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



Práctico 6: Composición e Inversa de funciones



1. $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = x + 5$

2. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = x + 5$

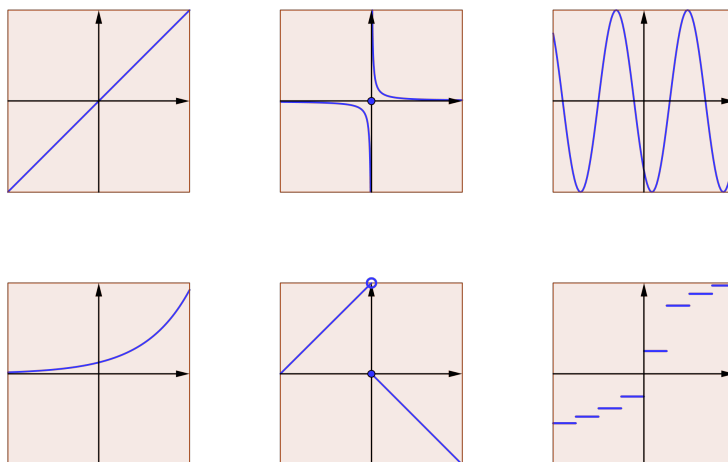
3. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 5$

4. $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = 2x$

5. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = 2x$

6. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 2x$

Ejercicio 7 Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



Ejercicio 8 Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos funciones.

1. Probar que si f y g son inyectivas entonces también lo es $g \circ f$.
2. Probar que si f y g son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.
3. a) Enunciar el recíproco de 1.
b) ¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.
4. a) Enunciar el recíproco de 2.
b) ¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.

Ejercicio 9 ¿Verdadero o falso?

1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces f es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).
2. Si f es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?
3. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.

Ejercicio 10 Verificar que los pares de funciones dadas corresponden a una función y su inversa. Salvo que se indique lo contrario el dominio es el más grande posible.

1. $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) = x^{1/3} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$



3. $\begin{cases} f(x) = \log_2(x+1) & \text{con dominio } (0, \infty) \\ g(x) = 2^x - 1 & \text{con dominio } \mathbb{R} \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = 2 + e^{x-1} & \text{con dominio } \mathbb{R} \\ g(x) = \ln(x-2) + 1 & \text{con dominio } (2, \infty) \end{cases}$

Graficar ambas funciones en cada caso en un mismo sistema de ejes. ¿Puedes observar alguna característica entre el gráfico de f y de g ?

Ejercicio 11 Se consideran las funciones trigonométricas:

- $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \sin(x)$.
- $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $g(x) = \cos(x)$.
- $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \tan(x)$.

1. Graficar cada función.

2. Notar con la ayuda del gráfico cada una de ellas es biyectiva y por tanto se define

- $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ como $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.
- $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ como $g^{-1}(x) = \arccos(x)$.
- $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ como $h^{-1}(x) = \arctan(x)$.

Realizar un bosquejo del gráfico de las inversas.

Ejercicio 12 Verificar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 7$.

3. $f : \mathbb{R} \setminus \{5/2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ tal que $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 3x^3$.

4. $f : [-\frac{4}{3}, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ con $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

Graficar f^{-1} . Utilizar GeoGebra.

Ejercicio 13 Demostrar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.

3. $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 \ln(x-1)$.

2. $f : [0, 4] \rightarrow [0, 32]$ tal que $f(x) = -x^2 - 4x + 32$.

4. $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$.

Graficar f^{-1} . Utilizar GeoGebra.

Ejercicio 14 Sean $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{-x/2}$. Consideramos la composición: $h = f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \text{Im}(h)$.

Indicar la opción correcta:

1. h es invertible y $h^{-1}(x) = 2 \ln(\frac{x}{x-1})$.

3. h es invertible y $h^{-1}(x) = \ln(\frac{2x}{x-1})$.

2. h no es invertible.

4. h es invertible y $h^{-1}(x) = 2 \ln(\frac{1}{x}) + 1$.

Ejercicio 15 (Ejercicios de pruebas anteriores) Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. La función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 2]$ dada por $f(x) = \cos(x) + 1$ es biyectiva.