Práctico 6: Funciones - Parte II

Ejercicio 1 *Las funciones cuadráticas son aquellas de la forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ con a_0, a_1 y a_2 en $\mathbb{R}$. El gráfico de f es una parábola.*

A. *Graficar las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$
c) $f(x) = 3x^2$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

Relacionar el coeficiente a_2 que multiplica a x^2 con la posición de la parábola en cada caso respecto a la parábola $y = x^2$.

B. *Graficar las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = -x^2 - 2$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

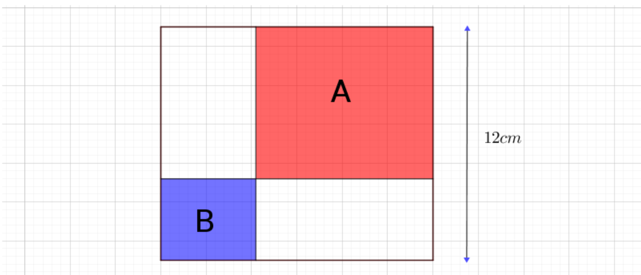
Observar que la suma de una constante es una traslación vertical.

C. *Graficar las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$
d) $f(x) = -2x^2 - 2x - 4$

1. *Para cada una de las funciones de la parte anterior hallar el conjunto preimagen de $\{2\}$ y de $[1, \infty)$.*

Ejercicio 2 *En un cuadrado de 12 cm de lado se trazan dos segmentos paralelos a los lados, de modo que queden determinados dos cuadrados A y B, como se indica en la siguiente figura:*



1. *Si cada lado del cuadrado B mide 3 cm, hallar el área sombreada.*
2. *Si cada lado del cuadrado B mide x cm, hallar el área sombreada $a(x)$.*
3. *¿Existe un valor del lado de B tal que el área sombreada sea $70cm^2$?*
4. *Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea igual a $80cm^2$.*
5. *Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea menor que $80cm^2$.*
6. *Hallar la medida del lado del cuadrado B tal que minimice el área sombreada, y determinar dicha área.*

Práctico 6: Funciones - Parte II

Ejercicio 3 1. *Graficar las siguientes funciones:*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x-1|$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3|\frac{1}{2}x+1|$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|-1$.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|+x$.

2. *Para cada una de las funciones de la parte anterior hallar el conjunto preimagen de* $\{1\}$ *y de* $[0,\infty)$.

Ejercicio 4

Graficar las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$

2. $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

3. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $k(x) = \begin{cases} -5 & si \quad x = 1 \\ x^2-1 & si \quad x \neq 1 \end{cases}$

4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Ejercicio 5 *Se considera* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que su gráfico se representa en la siguiente Figura.*

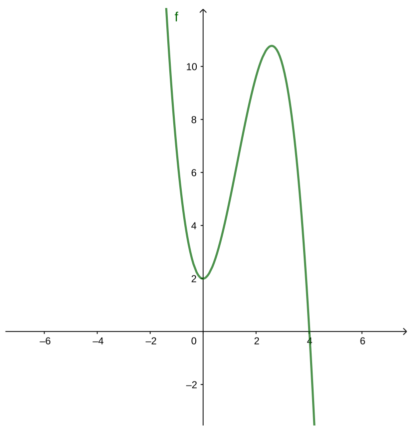


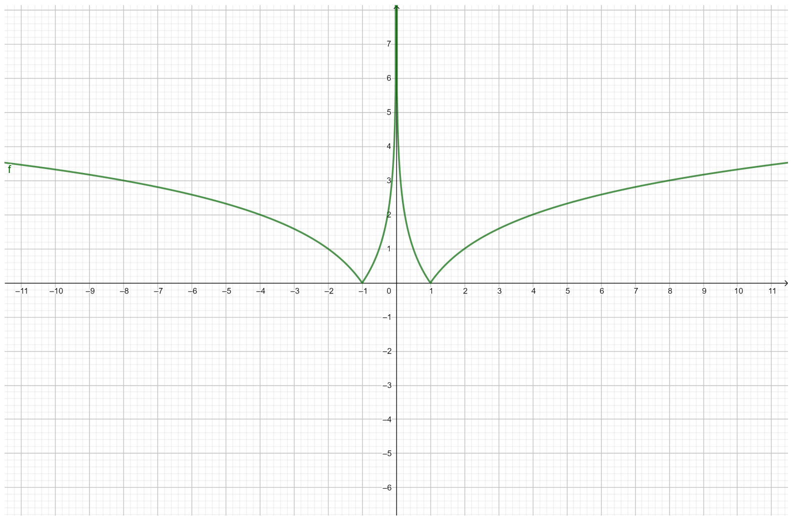
Figura 1: Ejercicio 5

Sin encontrar la expresión de f*, hallar el gráfico de las siguientes funciones:*

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = f(x)+1$.
2. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $i(x) = f(x)-2$.
3. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = f(x+1)$.
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = f(x-1)$.
5. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $m(x) = f(-x)$.
6. $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $n(x) = -f(x)$.
7. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $r(x) = -f(-x)$.
8. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $p(x) = 2f(x)$.

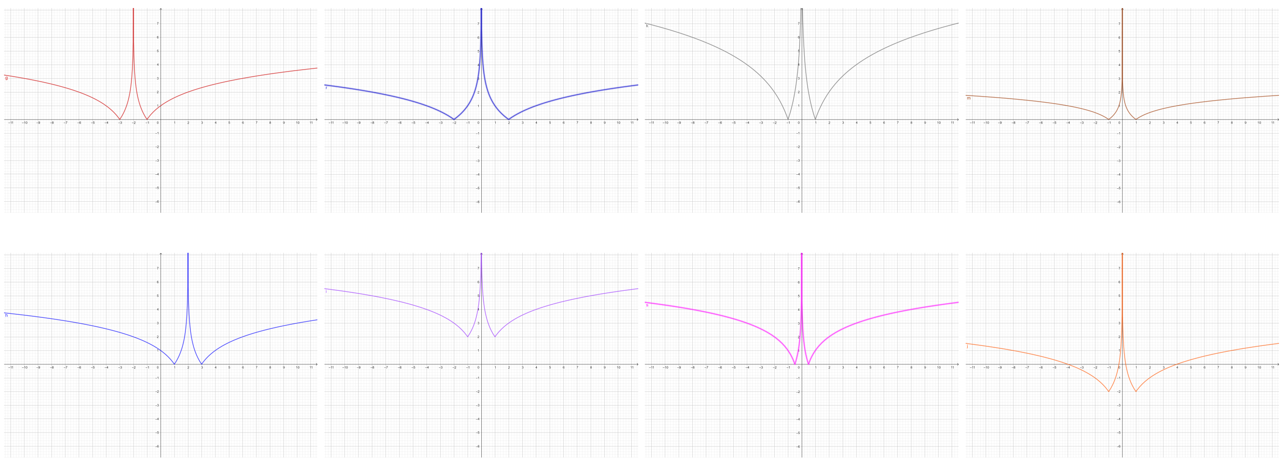
Práctico 6: Funciones - Parte II

Ejercicio 6 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por el gráfico que se muestra a continuación:*



Asociar cada gráfica con una de las siguientes funciones:

1. $f(x+2)$
2. $f(x-2)$
3. $f(x)+2$
4. $f(x)-2$
5. $f(2x)$
6. $f(x/2)$
7. $2f(x)$
8. $\frac{f(x)}{2}$



Ejercicio 7

1. *Realizar una tabla de valores de la función $f(x) = 3^x$ y esbozar el gráfico de dicha función.*
2. *Repetir la parte anterior para la función $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.*
3. *¿Observa alguna relación entre los gráficos? ¿Y entre las funciones?*
   Verificar con GeoGebra.

Ejercicio 8

1. *Hallar a sabiendo que el punto $(1,1)$ pertenece a la gráfica de la función $-a^x + 3$*
2. *Hallar c sabiendo que la gráfica de $f(x) = c2^x + 4$ pasa por el punto $(2,16)$.*
3. *Hallar k tal que el punto $(3,7)$ pertenezca a la gráfica de la función $f(x) = 3^{x-1} + k$.*

Práctico 6: Funciones - Parte II

Ejercicio 9 *Utilizando las transformaciones vistas en el ejercicio 5, graficar la función $h(x)$, siendo:*

1. $h(x) = 3^x + 1$
2. $h(x) = 3^{x-1}$
3. $h(x) = -3^x$

Verificar con GeoGebra.

Ejercicio 10

1. *Graficar las siguientes funciones:*

   a) $a(x) = e^{x+1}$
   b) $b(x) = e^{x-1}$
   c) $c(x) = -e^x$
   d) $d(x) = -e^{x+1}$

   Verificar con GeoGebra.

2. *Para cada una de las funciones de la parte anterior hallar el conjunto preimagen de $\{-1\}$ y de $[-1,1]$.*

Ejercicio 11 *En presencia de un antibiótico, se observa que un cultivo de bacterias decrece un 5% cada 8 horas, siendo la población inicial de 1000 individuos.*

1. *Hallar una fórmula que determine la cantidad de bacterias $C(t)$, siendo t el tiempo en días desde que se toma el antibiótico.*
2. *Determinar la cantidad de bacterias luego de 2 días de antibióticos.*
3. *Hallar cuánto tiempo es necesario para reducir la población de bacterias a la mitad de la inicial.*
4. *Determinar la cantidad de individuos que se pierden en el quinto día de suministro del medicamento.*

Ejercicio 12 *Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa (en gramos) restante después de t días está dada por la función:*

$$N(t) = 10e^{-0,1t}$$

1. *¿Cuál será la masa restante luego de una semana?*
2. *¿Cuánto tiempo demora en reducirse la masa inicial a su tercera parte?*
3. *Sea T_m el tiempo que demora en reducirse a la mitad.*
4. *Para un modelo exponencial general de la forma $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ¿Cuál es la relación entre T_m y λ?*

Ejercicio 13 *Hallar el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ lo más amplio posible donde la expresión analítica dada a continuación tiene sentido:*

1. $f(x) = \log_5(2x+1)$
2. $g(x) = \log_2(x+6)$
3. $f(x) = \ln(x+8)$

Ejercicio 14

1. *Realizar una tabla de valores de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_3(x)$ y esbozar el gráfico de dicha función.*
2. *Repetir la parte anterior para la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$.*
3. *¿Observa alguna relación entre los gráficos? ¿Y entre las funciones?*
4. *Comparar con los gráficos de las funciones f y g del ejercicio 7.1.*

Verificar con GeoGebra.

Ejercicio 15 1. *Hallar a tal que la gráfica de* $f : (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \log_a(x-3) + 1$ *pase por el punto* $(7, 0)$.

2. *Hallar c de modo que el punto* $(27, 7)$ *pertenezca a la gráfica de la función* $f : (2, +\infty)$ *tal que* $f(x) = c\log_5(x-2) + 1$.

3. *Hallar k tal que la gráfica de la función* $f : (-5, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -\log_3(x+5) + k$ *pase por el punto* $(4, 2)$.

Ejercicio 16 *Resolver analíticamente las siguientes ecuaciones y verificar gráficamente con Geogebra el resultado obtenido:*

1. $\log_2(3x+13) - \log_2(x-1) = 2$
2. $\log_3(x+1) + \log_3(x+5) = \log_3(7x+17)$
3. $\log_5(x+1) = 1 - \log_5(x-3)$
4. $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln 3 + 2\ln 2$

Ejercicio 17 *Leer el ejemplo 225 página 275 del libro de Carena y completar la siguiente tabla en la que I denota la intensidad del sonido en W/m2 y N denota el nivel de intensidad en dB.*

Fuente de sonido	*I*	*N*
Despertador	10^{-4}	
Avión despegando	*10*	
Camión de basura		*100*
Aspiradora		*70*
Bocina	*0.1*	
Sonido de fondo en un campo		*30*

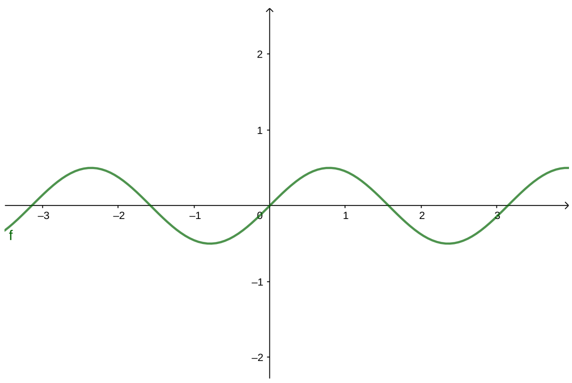
Ejercicio 18 *El terremoto ocurrido en San Juan (Argentina) en 1944 tuvo una magnitud de 7,8 en la escala de Richter, mientras que el del año 1894 había sido de magnitud 8,6. ¿Cuántas veces más intenso fue el de 1894 que el de 1944?*

Ejercicio 19 1. *Graficar* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3\sin(x)$.

2. *Graficar* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *y comparar con el gráfico de* $\cos(x)$. *¿Qué conclusiones se pueden sacar?*

Ejercicio 20 *Indicar la opción correcta justificando.*

1. *La siguiente gráfica corresponde a la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



tal que:

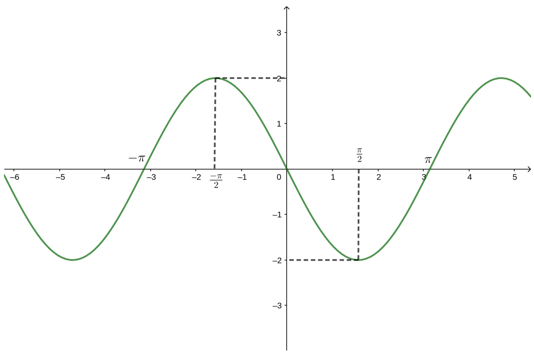
a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x).\operatorname{sen}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

d) $f(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$

2. *La siguiente gráfica*



corresponde a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que:*

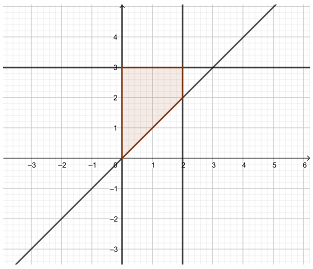
a) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

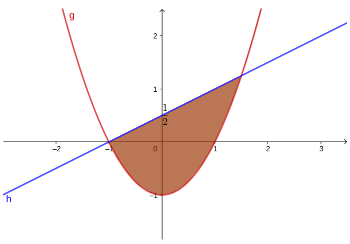
b) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

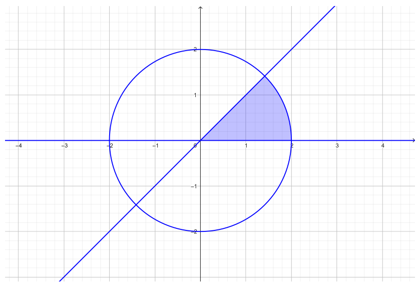
c) $f(x) = 2\cos(x) + \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \cos(2x) + \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 21 1. *Representar el conjunto de puntos de las región sombreada en cada una de las siguientes gráficas:*







Ejercicio 22 *Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:*

1. $\begin{cases} 1 + 5x > 5 - 3x \\ 0 \leq 1 - x < 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ x(x-1)(x-2)(x-3) < 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log(x+3) > 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2(x+6) \leq 3 \\ 0 \leq 1 - x < 1 \end{cases}$