Inducción completa

Sea $P(n)$ un enunciado que depende de un entero natural $n \in \mathbb{N}$.

Principio de inducción completa

Si (1) $P(0)$ se cumple, y (paso base)

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implica $P(n+1)$, (paso inductivo)

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $P(n)$. (conclusión)

Inducción completa

Sea $P(n)$ un enunciado que depende de un entero natural $n \in \mathbb{N}$.

Principio de inducción completa

Si (1) $P(0)$ se cumple, y (paso base)

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implica $P(n+1)$, (paso inductivo)

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $P(n)$. (conclusión)

Analogía con el dominó:

(1) Si la primera ficha de dominó cae, y

(2) Si cada ficha de dominó que cae empuja la ficha siguiente,

Entonces todas las fichas van a caer.

Inducción completa: terminología

- Con símbolos, el principio de inducción completa se escribe:

$$P(0) \;\wedge\; (\forall n \in \mathbb{N},\; P(n) \Rightarrow P(n+1)) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\; P(n)$$

Inducción completa: terminología

- Con símbolos, el principio de inducción completa se escribe:

$$P(0) \ \wedge \ (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

- Para usar el principio de inducción con un enunciado $P(n)$, se tiene que demostrar:

  (1) el paso base: $P(0)$

  (2) el paso inductivo: $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Y luego se puede concluir que: $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Inducción completa: terminología

- Con símbolos, el principio de inducción completa se escribe:

$$P(0) \;\wedge\; (\forall n \in \mathbb{N},\; P(n) \Rightarrow P(n+1)) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\; P(n)$$

- Para usar el principio de inducción con un enunciado $P(n)$, se tiene que demostrar:

  (1) el paso base: $P(0)$

  (2) el paso inductivo: $\forall n \in \mathbb{N},\; P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Y luego se puede concluir que: $\forall n \in \mathbb{N},\; P(n)$.

- Descomposición del paso de inducción:

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \underbrace{P(n)}_{\text{hipótesis de inducción (HI)}} \;\Rightarrow\; \underbrace{P(n+1)}_{\text{tesis de inducción (TI)}}$$

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base: $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1 - 1 = 1^2$

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base: $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1 - 1 = 1^2$
El paso base se verifica.

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base: $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1 - 1 = 1^2$

El paso base se verifica.

Paso inductivo:

Hipótesis inductiva: la propiedad se cumple para un natural h, o sea,

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = h^2$$

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base: $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1 - 1 = 1^2$
El paso base se verifica.
Paso inductivo:
Hipótesis inductiva: la propiedad se cumple para un natural h, o sea,

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = h^2$$

Tesis inductiva: la propiedad se cumple para el siguiente natural $(h+1)$, o sea,

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = (h+1)^2$$

Ejemplo

Probar por inducción que:

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base: $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1 - 1 = 1^2$
El paso base se verifica.
Paso inductivo:
Hipótesis inductiva: la propiedad se cumple para un natural h, o sea,

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = h^2$$

Tesis inductiva: la propiedad se cumple para el siguiente natural $(h+1)$, o sea,

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = (h+1)^2$$

Demostración del paso inductivo:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1.$$

Demostración del paso inductivo:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1.$$

Por hipótesis inductiva lo anterior es igual a

$$h^2 + 2(h+1) - 1 = h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$$

Demostración del paso inductivo:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1.$$

Por hipótesis inductiva lo anterior es igual a

$$h^2 + 2(h+1) - 1 = h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$$

El paso inductivo se verifica.

Demostración del paso inductivo:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1.$$

Por hipótesis inductiva lo anterior es igual a

$$h^2 + 2(h+1) - 1 = h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$$

El paso inductivo se verifica.
Por lo tanto la ecuación $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ se verifica para todos los naturales a partir de 1.