Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen

20 de febrero de 2024

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El examen tiene 6 ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 60 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 40 puntos)

Los dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.
Justifique sus respuestas.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.1.a)	D.1.1.b)	D.1.2	D.1.3	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. La parte real del complejo $(1+i)^{20}$ es:

(A) 0
(B) 2^{10}
(C) -2^{10}
(D) 2^{20}
(E) -2^{20}

---

2. Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = 0$ que cumple $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$. Entonces la derivada de la solución en $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

(A) $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
(B) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$
(C) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$
(D) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$
(E) $y'(\frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{-\pi}{2}}$

---

3. Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$, y $f(x,y,z) = z$. Entonces el valor de $\iiint_D f(x,y,z)$ es:

(A) 2π
(B) $\frac{3\pi}{2}$
(C) π
(D) 1
(E) $\frac{\pi}{8}$

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} + y - x, & \text{si } y < x \end{cases}$$

Entonces:

(A) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, f es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x-y-z=0$
(B) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, f es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x+y-z=0$
(C) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, f es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x+y+z=0$
(D) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, pero f no es diferenciable en el origen.
(E) Las derivadas parciales en el origen no existen.

5. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas como $f(x, y) = (\sin(x)y, e^{x^2+y^2})$, y $g(u, v) = \big((u + v)^3, v - u\big)$. Entonces, la entrada $(1, 1)$ (primera fila, primera columna) de $J_{g\circ f}(0, 1)$ es:

(A) e^{-1}
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $3e^2$
(D) 0
(E) $\frac{\pi}{2}$

---

6. Considere las series

- $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n}} 3^{-n}$,
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{log(n)}{n^2}$,

y la integral impropia $\int_0^1 \frac{sen(\frac{1}{x})}{x^2} dx$. Entonces:

(A) Ambas series y la integral impropia convergen.
(B) Una serie converge, la otra diverge y la integral impropia converge.
(C) Ambas series divergen y la integral impropia converge.
(D) Ambas series convergen pero la integral impropia no converge.
(E) Tanto las series como la integral impropia divergen.

DESARROLLO

Ejercicio 1 (20 puntos)

1. Definir límite finito de una sucesión de números reales. Es decir, completar la siguiente definición.
   Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ sii ...
2. Sean a_n y b_n sucesiones de números reales tales que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que ambas tienen límite finito. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. En las condiciones del item anterior, ¿es cierto que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$? En caso de ser cierto, demuestre. En caso de ser falso, dé un contraejemplo.

Ejercicio 2 (20 puntos)

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.
Realizar un bosquejo de D y calcular $\iint_D f(x, y)$, con $f(x, y) = xe^{y^2}$.