Examen Febrero 2024 - Versión 3

Martes **20** de febrero de 2024

| Nro de examen | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

- El puntaje total es de 100 puntos (10 puntos de VoF y 90 de MO).
- La duración del examen es de tres horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**

**Respuestas de los ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos**

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, $-1$ punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **V o F** según corresponda.

| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F |

**Respuestas de los ejercicios de múltiple opción. Total: 90 puntos**

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, $-2$ puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F** según corresponda.

| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 | Ej 6 | Ej 7 | Ej 8 | Ej 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | F | F | C | E | D | A | F |

---

**Notación:**

En el examen se usa la siguiente notación:

- $S^*(f,P)$ denota la suma superior y $S_*(f,P)$ la suma inferior de $f$ con respecto a la partición $P$.
- $f'$ denota la derivada de $f$.

---

**Datos que pueden ser de utilidad:**

- $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$
- $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(Esta carilla está en blanco a propósito)

## (I) Ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

**Afirmación 1:** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, entonces existe $P$ partición de $[1, 2]$ tal que $S^*(f_{|_{[1,2]}}, P) - S_*(f_{|_{[1,2]}}, P) < \frac{1}{2}$, donde $f_{|_{[1,2]}}$ denota la restricción de $f$ al intervalo $[1, 2]$.

**Afirmación 2:** La función $f : [-1, 2] \to [0, 4]$ tal que $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

**Afirmación 3:** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, 5]$ y $f(0) = f(5)$, entonces existe $x \in (0, 5)$ tal que $f(x) = 0$.

**Afirmación 4:** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en $[a, b]$, entonces $f$ es integrable en $[a, b]$.

**Afirmación 5:** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ .

---

## (II) Ejercicios de múltiple opción. Total: 90 puntos

### Ejercicio 1

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para cualquier par de conjuntos $A, B$ que verifiquen las siguientes condiciones:

- $A \cup B \subset (0, +\infty)$
- $10 \in A \cap B$.
- Si $x \in A$, entonces para todo $y \in (0, +\infty)$ que verifica que $y < x$ se cumple que $y \in A$.
- Si $x \in B$, entonces para todo $y \in (0, +\infty)$ que verifica que $y > x$ se cumple que $y \in B$.

A) $A$ tiene supremo y mínimo, $B$ no tiene supremo ni ínfimo.
B) $A$ no tiene mínimo y $B$ no tiene supremo.
C) Ambos conjuntos tienen supremo e ínfimo.
D) Ambos conjuntos tienen mínimo, y ambos conjuntos no tienen supremo.
E) $A$ no tiene mínimo y $B$ tiene supremo.
F) $A$ no tiene mínimo y $B$ no tiene ínfimo.

---

### Ejercicio 2

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(\alpha x)^2}-1}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ (\alpha x + 3)^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

¿Qué valores de $\alpha \geq 0$ hacen que $f$ sea continua?

A) $\alpha = 9$
B) $\alpha = 3$
C) $\alpha = 1$
D) $\alpha = 0$
E) Todos.
F) Ninguno.

---

### Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \arctan(\cos(x^2))$. El valor de $f'(\sqrt{\pi/6})$ es:

A) $f'(\sqrt{\pi/6}) = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\pi}{6}}$
B) $f'(\sqrt{\pi/6}) = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
C) $f'(\sqrt{\pi/6}) = -\frac{4}{7}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
D) $f'(\sqrt{\pi/6}) = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\pi}{6}}$
E) $f'(\sqrt{\pi/6}) = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
F) $f'(\sqrt{\pi/6}) = -\frac{4}{7}\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

---

### Ejercicio 4

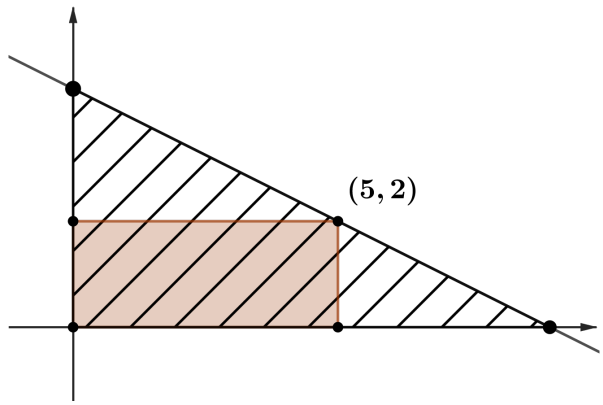
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x \left(2x^2 - 4x - 4\right)$. Indique la opción correcta:

A) $f$ es creciente en $\mathbb{R}$
B) $f$ es decreciente en $\mathbb{R}$
C) $f$ es creciente en $(1, +\infty)$
D) $f$ es decreciente en $(1, +\infty)$
E) $f$ es creciente en $(0, 2)$
F) $f$ es decreciente en $(0, 2)$

---

**Ejercicio 5**

Se considera $R$ el rectángulo de vértices opuestos $(0,0)$ y $(5,2)$. Luego se consideran todos los triángulos con dos de sus lados sobre los ejes de forma que el rectángulo quede comprendido dentro de dicho triángulo (ver la figura). El área mínima de un triángulo en estas condiciones es:




A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30 F) 35

---

**Ejercicio 6**

Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \cos^2(t)\mathrm{d}t - x}{\sin(x) - x}$$

A) $-2$ B) $-1$ C) $0$ D) $1$ E) $2$ F) $+\infty$

---

**Ejercicio 7**

Calcular

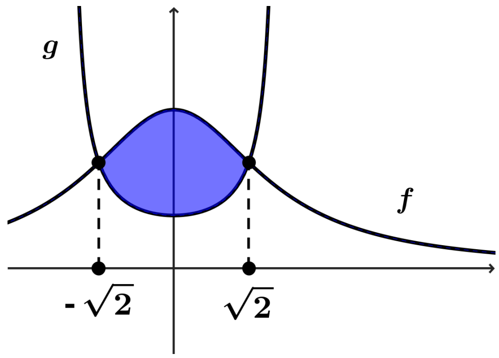
$$\int_0^1 \frac{e^{3\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

A) $\frac{3}{2}(e^7 - e)$ C) $\frac{3}{2}(e^4 - e)$ E) $2(e^4 - 1)$
B) $\frac{2}{3}(e^7 - e)$ D) $\frac{2}{3}(e^4 - e)$ F) $2(e^7 - 1)$

---

## Ejercicio 8

En la figura se muestra la región encerrada entre los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{12}{4+x^2}$ y $g(x) = \frac{4}{4-x^2}$.




El área de dicha región es:

A) $12 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\log\left(2+\sqrt{2}\right) - \log\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$
B) $24(\log(6)) - 8(\log(2))$
C) $24 \arctan\left(\sqrt{2}\right) - 2\left(\log\left(2+\sqrt{2}\right) - \log\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$
D) $12 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 8(\log(2))$
E) $24 \arctan\left(\sqrt{2}\right) - 8(\log(2))$
F) $24(\log(6)) + 2\left(\log\left(2+\sqrt{2}\right) - \log\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$

---

## Ejercicio 9

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Indicar cuál de los siguientes polinomios es el que mejor aproxima a $f(x)$ si $x$ está cerca de 1.

A) $e\left(10x^2 - 18x + 8\right)$
B) $e\left(5x^2 - 8x + 3\right)$
C) $e\left(5x^2 + 2x\right)$
D) $\frac{1}{e}\left(-6x^2 + 14x - 8\right)$
E) $\frac{1}{e}\left(-3x^2 + 2x\right)$
F) $\frac{1}{e}\left(-3x^2 + 8x - 5\right)$

---