Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen – 15 de febrero de 2025

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de tres horas y media.
- El puntaje total del examen es de 100 puntos. El mínimo para aprobar es 60 puntos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El examen tiene cinco ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- La siguiente tabla de valores para las funciones trigonométricas puede ser de utilidad:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 50 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 50 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran al final de la página 2.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.*a*)	D.1.*b*)	D.1.*c*)	D.2.*a*)	D.2.*b*)	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial

$$y'(x) = (1 + y(x)^2)3x^2$$

que cumple $y(0) = 1$. Entonces $y\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{12}}\right)$ es igual a:

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Se considera el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2}z^4 = 1 + i\}$$

Solo una de las siguientes afirmaciones sobre A es correcta. Indicar cuál:

(A) El producto de los elementos de A es igual a $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(B) A tiene exactamente cinco elementos distintos

(C) La suma de los elementos de A es igual a cero

(D) Existe al menos un elemento $z \in A$ tal que $\bar{z} \in A$

3. Se considera la siguiente integral impropia, donde $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2} - 1)^\alpha}\, dx$$

Entonces, la integral es convergente si y solo si:

(A) $\alpha < 0$ (B) $\alpha > 1$

(C) $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si $v = (1, 1)$, entonces:

(A) $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 1$ (B) No existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$

(C) $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ (D) $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \frac{1}{2}$

5. Sea $I = \iint_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ donde $S \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo acotado por las rectas $x = y$, $x = -y$ y $x = 1$. Entonces I es igual a:

(A) 2π (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{\pi}{4}$

DESARROLLO

1. (**30 puntos**) Se consideran dos sucesiones de números reales positivos $a_n, b_n > 0$ tales que existe un número real $L > 0$ que cumple:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

a) Demostrar que dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces:

$$(L - \varepsilon)\, b_n < a_n < (L + \varepsilon)\, b_n$$

b) Usando la parte anterior, demostrar que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de la misma clase. Puede utilizar **otros** criterios en la demostración, enunciándolos previamente.

c) Clasificar, justificando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + e^n}{2^n + n^6}$$

2. (**20 puntos**) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(e^y - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcular, si existen, las derivadas parciales en el origen.

b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.