Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Julio 2022**

EXAMEN – 21 JULIO DE 2022

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Respuestas Verdadero o Falso

1	2	3	4	5
F	F	F	V	V

Respuestas Ejercicios Multiple Opción

E. 1	E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10
A	A	C	A	B	C	D	B	B	B

Importante

- El examen dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 5 ejercicios verdadero/falso de 4 puntos cada uno y 10 ejercicios múltiple opción de 8 puntos cada uno. El examen es de 100 puntos en total. Se aprueba con 60 puntos.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Notación:** Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la frontera y el interior de A se denotan por $\partial(A)$ y $int(A)$ respectivamente.

1. Verdadero - Falso.

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

(1) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y $B \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado entonces $A \cap B$ es cerrado.

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un función continua en $(0,0)$ y las derivadas parciales de f en $(0,0)$ existen, entonces f es diferenciable $(0,0)$.

(3) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente.

(4) La parte imaginaria del complejo $\frac{5}{2-i}$ es igual a 1.

(5) La función $y(x) = e^{3x}\sin(2x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$.

2. Múltiple Opción

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, -2 punto si la respuesta es incorrecta 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Entonces

A. La función f es continua en $\mathbb{R}^2$ y el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde sus derivadas parciales no existen en $(0, 0)$.

B. La función f es una función con derivadas parciales continuas en $(0, 0)$ por lo tanto es diferenciable $(0, 0)$.

C. La función f es una función continua en $\mathbb{R}^2$ y su plano tangente en $(0, 0)$ es igual a $z = 0$.

D. La función f es diferenciable en $(0, 0)$ pero no tiene derivadas parciales continuas en $(0, 0)$.

Solución. La opción correcta es la (A): Notemos que la función es la composición de las funciones continuas $h(t) = \sqrt{t}$ y $g(x, y) = x^2 + y^2$. Por lo tanto f es continua para todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Al calcular las derivadas parciales

I $(x, y) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Por lo tanto, podemos concluir que la función no tiene derivada parcial respecto a x en $(0, 0)$. Razonando de manera análoga concluimos que no tiene derivada parcial respecto a y en $(0, 0)$.

II $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(2) Consideremos la función $w = 2st$ donde $s = x^2 + y^2$, $t = \dfrac{x}{y}$. Entonces, la dirección de máximo crecimiento de w en $x = y = 1$ es:

A. la dirección del vector $(1, 0)$.

B. la dirección del vector $(0, 1)$.

C. la dirección del vector $(2, 1)$.

D. la dirección del vector $(1, 1)$.

Solución. La opción correcta es la (A):

La dirección de máximo crecimiento es la dirección del gradiente en el punto $(1, 1)$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \frac{6x^2 + 2y^2}{y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy^2 - 2x^3}{y^2}$$

$\Rightarrow \nabla w(1, 1) = (8, 0)$. Entonces la dirección de máximo crecimiento es el eje (Ox) con dirección $(1, 0)$.

(3) El volumen encerrado entre el plano de ecuación $z = 0$ y el gráfico de la función $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ vale:

A. $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.
B. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.
C. 2π.
D. π.

Solución. La opción correcta es la (C): Para calcular el volumen pedido, encontramos la intersección del gráfico del paraboloide con el plano xy y luego calculamos la integral de la función $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ en ese dominio. Como el plano xy se corresponde con la ecuación $z = 0$, la intersección del gráfico del paraboloide con el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, y debemos integrar en su interior.

Luego, la integral a calcular es:

$$\iint_D \left(2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - r^2\right) r dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r - r^3\right) dr = 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right)_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

(4) El polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = \cos(x+y)e^{-x^2}$ en $(0,0)$ es:
A. $1 - \frac{3}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2$.
B. $1 + x - \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$.
C. $1 + \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$.
D. 1.

Solución. La opción correcta es la (A): Las derivadas hasta segundo orden de la función $f(x,y) = \cos(x+y)e^{-x^2}$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x^2}\left(\sin(x+y) + 2x\cos(x+y)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-x^2}\sin(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2}\left(\left(4x^2 - 3\right)\cos(x+y) + 4x\sin(x+y)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2}\left(2x\sin(x+y) - \cos(x+y)\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x^2}\cos(x+y).$$

Evaluadas en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1.$$

Ahora, el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ alrededor del origen es:

$$f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right).$$

Sustituyendo los términos correspondientes, tenemos el polinomio:

$$1 - \frac{3}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2.$$

(5) La serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^{n}$$

A. No se puede clasificar.
B. diverge.
C. oscila.
D. converge.

Solución. La opción correcta es la (B):

Por un lado, es una serie de términos positivos, con lo cual se puede utilizar el criterio de la raíz enésima. La raíz enésima del término de la serie es:

$$n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Como $\log(1+\frac{2}{n}) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, el límite $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = lim_{n\to\infty} n\frac{2}{n} = 2 > 1$.

Según el criterio de la raíz enésima, la serie diverge.

(6) Se considera la sucesión a_n, definida para todo $n \in \mathbf{N}$, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n-2} \\ a_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Entonces, de a_n se puede decir que:

A. es monótona creciente y convergente a 1.
B. es monótona decreciente y convergente a 1.
C. es monótona creciente y no convergente.
D. es monótona decreciente y no convergente.

Solución. La opción correcta es la (C):

Para ver si es creciente o decreciente, es necesario comparar a a_{n+1} con a_n. Por ejemplo, se puede investigar si $a_{n+1} - a_n$ es mayor o menor que 0.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a_n - 2} - a_n = \frac{a_n^2 - a_n^2 + 2a_n}{a_n - 2} = \frac{2a_n}{a_n - 2}$$

Notar que si $a_n > 2$, esta expresión tiene signo positivo, es decir, $a_{n+1} > a_n$. Como $a_0 = \frac{5}{2}$, inicialmente es monótona creciente estricto, por lo que será mayor que 2 para todo $n \in \mathbf{N}$ y entonces siempre será monótona creciente estricto.

Para investigar si es acotada o no, se puede ver si existe algún k tal que $a_{n+1} - a_n > k > 0$. Por ejemplo para $k = 2$, sucede que:

$$a_{n+1} - a_n > 2 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2a_n}{a_n - 2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{a_n - 2} > 0$$

Como esto sucede para todo $a_n > 2$, se puede ver que la sucesión siempre crece por un término mayor a 2, con lo cual es no acotada, es decir, es divergente (y no convergente).

(7) Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces $\partial(A) \cup int(A) = A$.
II. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto de sus puntos de acumulación es cerrado.
III. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia cualquiera de conjuntos cerrados entonces $\cup_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado.

Entonces

A. I, III son verdaderas y II es falsa

B. I, II, son verdaderas y III es falsa.

C. II, III son verdaderas y I es falsa.

D. Solamente II es verdadera.

Solución. La opción correcta es la (D): Remitimos a las notas del curso.

(8) Sea (a_n, b_n) una sucesión en $\mathbb{R}^2$.

Entonces

A. Si (a_n) y (b_n) no convergen entonces (a_n, b_n) no tiene subsucesión convergente.

B. Si (a_n, b_n) converge entonces la sucesión real $c_n = a_n b_n$ converge.

C. Si (a_n, b_n) converge entonces la sucesión real $d_n = a_n + b_n$ diverge.

D. Si (a_n, b_n) tiene una subsucesión convergente entonces la sucesión (a_n, b_n) converge.

Solución. La opción correcta es la (B): Remitimos a las notas del curso.

(9) Sea $y = y(x)$ una función que satisface la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = -6x^2 - 8x + 13$ con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 3$.

Entonces

A. $y(1) = e^2 + e^3$.

B. $y(1) = 2(\dfrac{1}{e^2} + e^3)$.

C. $y(1) = e^{-2} + e^3$.

D. $y(1) = \dfrac{1}{e^2} + e^3 + 1$.

Solución. La opción correcta es la (B):

La ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ cuyas soluciones son -2 y 3. La solución general de la ecuación homogénea es entonces:

$$\Phi_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

Buscamos una solución particular de la forma $\Phi_p(x) = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que:

$$2a - (2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = -6x^2 - 8x + 13 \Rightarrow -6ax^2 + (-2a - 6b)x + (2a - b - 6c) = -6x^2 - 8x + 13$$

Identificando:

$$\begin{cases} -6a = -6 \\ -2a - 6b = -8 \\ 2a - b - 6c = 13 \end{cases}$$

por lo que $a = 1,\ b = 1,\ c = -2$. La solución general de la ecuación es:

$$\Phi(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + x^2 + x - 2$$

Sustituyendo las condiciones iniciales tenemos $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases}$ por lo que $C_1 = C_2 + 2$. Entonces

$$\Phi(x) = 2e^{-2x} + 2e^{3x} + x^2 + x - 2$$

Finalmente $\Phi(1) = 2e^{-2} + e^3 = 2\left(\frac{1}{e^2} + e^3\right)$

(10) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La integral $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{x}{2-x}\right)^{\alpha} dx$:

A. converge para todo $\alpha > 1$.
B. converge para todo $\alpha \in (-1, 1)$.
C. converge para todo $\alpha < 0$.
D. converge para todo $\alpha \in (-1, 0)$.

Solución. La opción correcta es la (B):

- Si $\alpha = 0$ la integral claramente es convergente
- Si $\alpha > 0$ entonces la integral es de segunda especie en $x = 2$ y se comporta como $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^{\alpha}} dx$ la cual converge si $\alpha < 1$
- Si $\alpha < 0$ entonces la integral es de segunda especie en $x = 0$ y se comporta como $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x)^{-\alpha}} dx$ la cual converge si $-\alpha < 1$ es decir si $\alpha > 1$.

Por lo tanto la integral converge si y sólo si $\alpha \in (-1, 1)$.