Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen

19 de diciembre de 2022

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de cuatro horas.
- El puntaje total del examen es de 100 puntos. El mínimo para aprobar es 60 puntos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El examen tiene seis ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Notación**: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos con $\mathrm{int}(A)$ al interior de A y con A^c al complemento de A, definido como $A^c = A \setminus \mathbb{R}^n = \{p \in \mathbb{R}^n : p \notin A\}$.
- La siguiente tabla de valores para las funciones seno y coseno puede ser de utilidad:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 48 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.1.c)	D.1.d)	D.2.a)	D.2.b)	D.2.c)	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 1 - 2x$, con condiciones iniciales $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$. Entonces, $y(2)$ es igual a:

(A) $y(2) = e^2 + e^{-2} - 1$ (B) $y(2) = e^4 - e^{-2} + 1$ (C) $y(2) = e^2 + e^{-4} - 2$

(D) $y(2) = e^4 + e^{-2} - 4$ (E) $y(2) = e^4 + 2e^{-2} - 1$

---

2. Considere la integral impropia y la serie que siguen:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\, dx \qquad\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Entonces:

(A) Ambas son divergentes.
(B) La serie es divergente y la integral es convergente.
(C) Ambas son convergentes.
(D) La integral es divergente y la serie es absolutamente convergente.
(E) La integral es divergente, la serie es condicionalmente convergente.

---

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones de clase C^1, que cumplen:

- $g(u, v) = (u^2 + v^3, e^{u^2} - v)$
- $\nabla f(1, 0) = (1, -1)$
- Para el vector $\vec{v} = (1, 1)$, se tiene $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, e) = 4$
- $f(x, e) = x^2 + 1$.

La matriz Jacobiana de la función $f \circ g$ en el punto $(1, 0)$ es:

(A) $(4 + 4e, -2)$ (B) $(4 + 2e, -2e)$ (C) $(2 + 2e, 0)$

(D) $(2e, -1)$ (E) $(2 - 2e, 1)$

---

4. Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$\begin{cases} z^4 = 1 - i\sqrt{3} \\ z + \bar{z} > 0 \end{cases}$$

Solo una de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto A es correcta. Indique cuál:

(A) A es simétrico respecto al eje real.
(B) A es simétrico respecto al eje imaginario.
(C) A tiene exactamente dos elementos distintos.
(D) A tiene exactamente cuatro elementos distintos.
(E) Todos los elementos de A están en la circunferencia de centro 0 y radio 1.

---

5. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido como:

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x) = 0 \ , \ \sin(y) = -1\big\}$$

Considere las siguientes afirmaciones sobre el conjunto B:

(I) $\text{int}(B) = \emptyset$.

(II) B es cerrado.

(III) Todos los elementos de B son puntos de acumulación de B^c.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solamente las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(C) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
(D) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(E) Todas las afirmaciones son falsas.

---

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = y$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido como:

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \ , \ y \geq x\big\}$$

La integral de f en D es igual a:

(A) $\displaystyle\iint_D f = \frac{\pi}{3}$ (B) $\displaystyle\iint_D f = 1$ (C) $\displaystyle\iint_D f = \sqrt{\pi}$

(D) $\displaystyle\iint_D f = \frac{3}{4}$ (E) $\displaystyle\iint_D f = \frac{1}{6}$

DESARROLLO

1. (**26 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $a = (x_0, y_0)$ un punto del plano.

a) Definir continuidad de f en el punto a.

b) Sea a_n una sucesión de elementos de $\mathbb{R}^2$. Definir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

c) Demostrar que si f es continua en a, y una sucesión a_n cumple $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilice el resultado del ítem anterior para estudiar la continuidad de f en el origen.

---

2. (**26 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Calcular las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de la función en el origen.