Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2022

Solución Segundo parcial

26 de noviembre de 2022

MÚLTIPLE OPCIÓN

Las vesiones del parcial se identifican por el primer ejercicio de múltiple opción.
Versión 1: El primer ejercicio es "Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = \sin(y^2)\ldots$"
Versión 2: El primer ejercicio es "El polinomio de Taylor de orden 2 de ..."
Las respuestas correctas en cada versión son:

Versión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	C	D	B	C	D
2	A	B	E	B	E

Resolución de ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = \sin(y^2)$, y D el dominio triangular con vértices $(0, 0)$, $(-1, \sqrt{\pi})$ y $(1, \sqrt{\pi})$. Entonces la integral de f en D vale:

El dominio es el triángulo en el semiplano superior ($y \geq 0$), donde los lados son las rectas $y = \sqrt{\pi}x$, $y = -\sqrt{\pi}x$, e $y = \sqrt{\pi}$. Con un orden de integración, la operatoria resulta complicada. Sin embargo en el otro sentido:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-1}{\sqrt{\pi}}y}^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}y} \sin(y^2)dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\frac{2y}{\sqrt{\pi}}dy.$$

Ahora, con el cambio de variable $u = y^2$ resulta:

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(u)du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que $f(2, 1) = (0, -1, \pi/4)$ y

$$J_f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $g(u, v, w) = e^{uv} - \cos(2w)$. Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como $h(x, y) = g(f(x, y))$, indicar cuánto vale $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2, 1)$:

Calcularemos el gradiente de h como el producto del gradiente de g en $f(2, 1)$ y la Jacobiana de f en $(2, 1)$. Derivando, obtenemos que el gradiente de g es $\nabla g(u, v, w) = (ve^{uv}, ue^{uv}, 2\sin(2w))$. Evaluando en $f(2, 1) = (0, -1, \pi/4)$ resulta $\nabla g(0, -1, \pi/4) = (-1, 0, 2)$. Ahora, el producto es

$$\nabla g(0, -1, \pi/4) \cdot J_f(2, 1) = (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (-3, 5),$$

de donde $\frac{\partial h}{\partial y}(2,1)=5$.

---

3. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)=\log(x^2+y)$ en el punto $(1,0)$ es:

Observemos que $f(1,0)=0$ y que las derivadas parciales hasta segundo orden de f son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x^2+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{2(x^2-y)}{(x^2+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=-2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{1}{(x^2+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)=-1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -\frac{2x}{(x^2+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,0)=-2
\end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(1,0)$ es:

$$p_2(x,y)=2(x-1)+y-2\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2(x-1)y=-3+4x+3y-x^2-\frac{y^2}{2}-2xy$$

---

4. Hallar el valor del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$ para el cual $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{y(x^2+y^2)} & \text{si } y\neq 0\\ \alpha & \text{si } y=0\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

Para que f sea continua en $(0,0)$ debe cumplirse que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=\alpha$. Estudiemos entonces el límite de f cuando $(x,y)\to(0,0)$. Observemos que $f(0,y)=0$, por lo que $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$. Si en cambio nos aceramos al $(0,0)$ por la curva $y=x^2$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^2(x^2+x^4)}=\frac{1}{1+x^2}=1$$

Entonces no existe el límite de f cuando $(x,y)\to(0,0)$, por lo que f es discontinua en $(0,0)$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$.

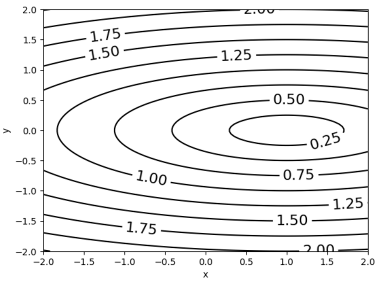
Vale la pena aclarar que en este caso no podemos usar polares, puesto que con ese cambio de variable la función resulta:

$$f(\rho,\theta)=\rho\frac{\cos^4(\theta)}{\sin(\theta)}$$

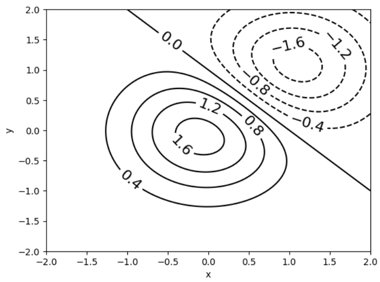
y $\frac{\cos^4(\theta)}{\sin(\theta)}$ no está acotada en ningún entorno del $(0,0)$.

---

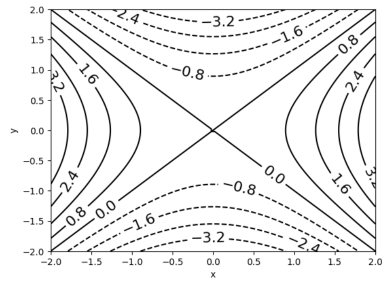
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = \text{máx}\{x^2 + y^2, 2x\}$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



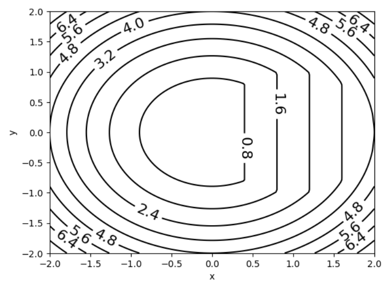
(A)



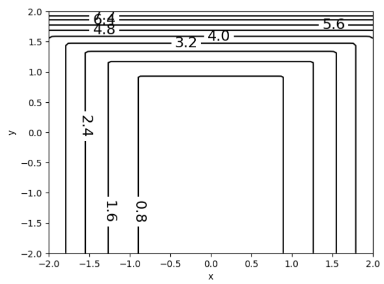
(B)



(C)



(D)



(E)

Observar que la función es un máximo entre dos expresiones. Por lo tanto, las curvas de nivel tendrán la forma de las curvas correspondientes a una u otra expresión, dependiendo de cuál sea donde se alcanza el máximo en cada zona. Las curvas de nivel de la primera expresión son claramente circunferencias, y de la expresión $2x$ son rectas verticales. Por otro lado, la igualdad entre las expresiones se da cuando $x^2 + y^2 = 2x$, que podemos re-escribir completando cuadrados como $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$, o lo que es lo mismo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Es decir, una circunferencia de radio 1 centrada en el $(1, 0)$. Es fácil ver que en el interior de la cirunferencia la expresión más grande es $2x$, y en el exterior $x^2 + y^2$, por lo que la figura (D) es la que se corresponde con la función estudiada.

DESARROLLO

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Decimos que f es diferenciable en $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sii ...)

Ver definición 6.11 o 6.12 en las notas del curso.

b) Demostrar que si f es diferenciable en un punto a, y v es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces existe la derivada direccional de f respecto a v en el punto a. Calcular dicha derivada en términos de los elementos que aparecen en la definición del ítem anterior.

Ver punto 3. en la demostración del Teorema 6.13 en las notas del curso.

c) Si se sabe que f es diferenciable y que $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(2,3)=6$, y $\dfrac{\partial f}{\partial v_2}(2,3)=-3$, donde $v_1=(2,1)$ y $v_2=(1,-1)$, calcular $\nabla f(2,3)$.

Como f es diferenciable, de la parte anterior sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(2,3)=\langle \nabla f(2,3), v_1\rangle$, y lo mismo para v_2. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{cases} 6 & = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,3)\cdot 2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,3)\cdot 1 \\ -3 & = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,3) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,3) \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $3=3\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)$, de donde $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)=1$. Luego sustityendo en cualquiera de las ecuaciones llegamos a que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=4$, por lo que $\nabla f(2,3)=(1,4)$.

---

2. Calcular la integral de la función $f(x,y,z)=ze^{x^2+y^2}$ en el dominio:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\}.$$

El dominio es el conjunto que queda entre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=2$, por lo que una forma conveniente de escribir la integral es utilizando coordenadas cilíndricas. La función resulta ze^{ρ^2}, y la integral es entonces

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^z ze^{\rho^2}\rho\, d\rho d\theta dz = 2\pi\int_0^2 z\frac{e^{\rho^2}}{2}\bigg|_0^z dz = \pi\int_0^2 z(e^{z^2}-1)dz$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(e^{z^2}\bigg|_0^2 - z^2\bigg|_0^2\right)=\frac{\pi(e^4-5)}{2}$$
