Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Julio 2022**

SEGUNDO PARCIAL – 02 JULIO DE 2022

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Respuestas Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Respuestas Ejercicios Multiple Opción

E. 1	E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10

Importante

- El parcial dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Tienen 10 ejercicios verdadero/falso de 2 puntos cada uno y 10 ejercicios múltiple opción de 4 puntos cada uno. El parcial es de 60 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos.
- **Notación:** Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\partial(A)$ la frontera de A, $int(A)$ el conjunto de sus puntos interiores y $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$.

1. Verdadero - Falso.

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

(1) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ entonces f es continua en $(0,0)$.

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ entonces f es diferenciable en $(0,0)$.

(3) Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Entonces la frontera de A coincide con el conjunto de los puntos de acumulación de A.

(4) Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Entonces la frontera de A coincide con el conjunto de los puntos de acumulación de A.

(5) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x,y) = x + 2y + 1$ entonces el diferencial de f en (1,1) es $df_{(1,1)}(x,y) = x + 2y + 1$.

(6) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x,y) = x+2y+1$ entonces el plano tangente de f en (1,1) es $z = x+2y+1$.

(7) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ entonces $A^c \cup \partial(A) = (int(A))^c$.

(8) Si f es diferenciable en a entonces $-5f$ es diferenciable en a.

(9) Si una sucesión en $\mathbb{R}^2$ es acotada entonces alguna sucesión coordenada es convergente.

(10) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a entonces $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en a.

2. Múltiple Opción

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

1. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \ y > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \ y > 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \ y < 0 \\ 4 & \text{si } x > 0 \ y < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

A. La función es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.
B. La función es discontinua solamente en $(0,0)$.
C. La función es continua para todo (x,y) tal que $xy \neq 0$.
D. La función es discontinua únicamente sobre todos los puntos del eje $(0x)$.

2. Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si A y B son dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Entonces su unión $A \bigcup B$ y su intersección $A \bigcap B$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.
II. El conjunto $A = \{p\}$ fomado por un solo punto $p \in \mathbb{R}^n$ no es un abierto en $\mathbb{R}^n$.
III. Sea A un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. La frontera de A es un conjunto cerrado.
IV. El conjunto $A = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\right\}$ no tiene puntos interiores.

Entonces

A. Todas las afirmaciones son verdaderas.
B. I, II, IV son verdaderas y III es falsa.
C. II, III, IV son veradaderas y I es falsa.
D. I, III y IV son verdaderas II es falsa.

3. Si $f(x,y) = (e^{2x}\sin(y), e^{3x}\cos(y))$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que:

$$J_g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g(1) = (0,0)$$

Entonces $d(f \circ g)_{(1)}(t-1)$ vale

A. $((t-1), 2(t-1))$
B. $(2e^2(t-1), 3e^3(t-1))$
C. $(3(t-1), 2(t-1))$
D. $(2(t-1), 3(t-1))$

4. De la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se conoce que:

- f es diferenciable en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ con $\vec{v} = (1,-2)$

Si $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, entonces $\frac{\partial}{\partial\theta}(f \circ g)(r,\theta)$ en $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ vale:

A. $-\sqrt{2} - 2$
B. $\sqrt{2} + 2$
C. $\sqrt{2}$
D. $-\sqrt{2}$

Puede ser útil recordar que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \cos(2cx + ay)$$

donde c es una constante no nula ($c \neq 0$).

Entonces

A. La función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

para infinitos valor de a.

B. Existen exáctamente dos valores de a para los cuales la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

C. Existe un único valor de a para el cual la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

D. No existen valores de a para los cuales la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces

A. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y ambas son continuas en $(0, 0)$.

B. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y sólo una de ellas es continua en $(0, 0)$.

C. Existen las derivadas parciales de f en todo punto del plano y ninguna es continua en $(0, 0)$.

D. Las derivadas parciales de f no están definidas en todo el plano.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces:

A. f es continua y diferenciable en $(0, 0)$.

B. f es continua en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en $(0, 0)$.

C. f es diferenciable en $(0, 0)$ pero no es continua en $(0, 0)$.

D. f no es diferenciable ni continua en $(0, 0)$.

8 El valor del límite

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xe^y - \left(2 + (x-2) + 2y + 2y^2 + (x-2)y + (x-2)^2\right)}{(x-2)^2 + y^2}$$

es:

A. 1

B. -1.

C. 0

D. No existe.

9. Sea π el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = x^3y + 2y^2 + e^{xy}$ en el punto $(0,2,f(0,2))$. Selecione la opción correcta:
   A. $(-\frac{1}{2}, 1) \in \pi$.
   B. $(-1,1,9) \in \pi$.
   C. $(-\frac{1}{2}, 1, 0) \in \pi$.
   D. $(-1,1,0) \in \pi$.

10. Se considera la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ Entonces $\int\int_D xy\,dy\,dx$ es igual a
    A. $\frac{\pi}{4}$
    B. $\frac{1}{12}$
    C. $\frac{1}{6}$
    D. $-\frac{1}{12}$