

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2022

Solución Primer parcial

1 de octubre de 2022

MÚLTIPLE OPCIÓN

Las versiones del parcial se identifican por el primer ejercicio de múltiple opción.

Versión 1: El primer ejercicio es “Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial ...”

Versión 2: El primer ejercicio es “Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos ...”

Las respuestas correctas en cada versión son:

Versión	1	2	3	4	5
1	E	B	A	D	D
2	B	E	C	A	C

DESARROLLO

- Definir límite finito de una sucesión ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ sii ...)
Ver definición 2.3. en las notas del curso.
 - Definir sucesión acotada (Se dice que una sucesión a_n es acotada sii ...)
Ver definición 2.5. en las notas del curso.
- Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
Sea $\varepsilon > 0$. Buscaremos un n_0 a partir del cual la sucesión producto $a_n b_n$ cumpla $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$. Como b_n es acotada, existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| < K$ para todo natural n . Tomemos entonces $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Como a_n tiene límite cero, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual $|a_n| < \varepsilon'$.
Tenemos entonces que a partir de ese n_0 , se cumple que $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon$, que es lo que se pretendía encontrar.
- Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n , con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
Hay muchísimos ejemplos de sucesiones, y muy distintos, que cumplen lo pedido. Un ejemplo es $a_n = 1/n$ y $b_n = \sqrt{n}$, ya que el producto resulta $a_n b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
 - Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n , con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).
De nuevo, hay muchísimos ejemplos de sucesiones, y muy distintos, que cumplen lo pedido. Un ejemplo es $a_n = 1/n$ y $b_n = n^2$, ya que el producto resulta $a_n b_n = n$.