Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2023

Examen

20 de diciembre de 2023

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El examen tiene 6 ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 60 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 40 puntos)

Los dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

Justifique sus respuestas.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.1.a)	D.1.1.b)	D.1.2	D.1.3	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Considere el polinomio complejo $P(z) = z^8 - 2z^3$. Entonces:

(A) Tiene exactamente seis raíces distintas, dos de las cuales cumplen $Re(z) < 0$.
(B) Tiene exactamente seis raíces distintas, tres de las cuales cumplen $Im(z) > 0$.
(C) Tiene exactamente ocho raíces distintas, todas cumplen $Re(z) = 0$.
(D) Tiene exactamente ocho raíces distintas, todas cumplen $Im(z) = 0$.
(E) Tiene exactamente una solución.

---

2. Considere los conjuntos $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$, y $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, -1 \leq y \leq 1\}$. Sea $A = A_1 \cup A_2$, y la sucesión $a_k = \left((-1)^{k+1} + \frac{1}{k^2}, (-1)^k\right)$. Entonces:

(A) Todas las subsucesiones convergentes de a_k convergen a puntos de $int(A)$.
(B) Todas las subsucesiones convergentes de a_k convergen a puntos de ∂A.
(C) Todas las subsucesiones convergentes de a_k convergen a puntos de A^c.
(D) La sucesión a_k no tiene subsucesiones convergentes.
(E) Algunas subsucesiones de a_k convergen a puntos de $int(A)$ y otras a puntos de ∂A.

---

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas como $f(x, y) = (e^{2xy}, 1 + \sin(x))$, y $g(u, v) = \left((u + v)^2, v^5\right)$. Entonces, la suma de las entradas de la segunda fila de $J_{g \circ f}(\pi, 0)$ es:

(A) π
(B) 5
(C) -5
(D) 1
(E) 0

---

4. Considere las siguientes series e integral:

$$(I)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)} \qquad (II) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln(k)} \qquad (III)\ \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

Entonces:

(A) Solamente la integral (III) es convergente.
(B) Solamente la integral (III) y la serie (I) son convergentes.
(C) Solamente la serie (II) es convergente.
(D) Son las tres convergentes.
(E) Solamente las series (I) y (II) son convergentes.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, de la que se sabe:

- $f(x, 2-x) = 3x$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 1$, donde $v = (1,1)$.

Entonces el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,1)$ es:

(A) $2x - y - z = 0$
(B) $x - 2y - z = 2$
(C) $x - y - z = 0$
(D) $2x - y - z = -2$
(E) $x + y - z = 0$

6. Considere la ecuación diferencial $2x - 2y'(x)y(x) = -1$. Entonces la solución con condición inicial $y(0) = 1$ es:

(A) $y(x) = 3x^3 - x + 1$
(B) $y(x) = 3x^3 - 2x + 2$
(C) $y(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
(D) $y(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$
(E) $y(x) = e^{3x}$

DESARROLLO

Ejercicio 1 (20 puntos)

1. Definir función acotada y su negación. Es decir:
   a) Completar la siguiente definición: Decimos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada sii ...
   b) Escribir la negación de la definición anterior.
2. Completar el siguiente enunciado, de forma de obtener uno de los resultados demostrados en el curso.

   Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto ...... y x_n una sucesión incluida en K. Entonces .... convergente a un punto ....

3. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua, K un conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. Probar que f es acotada. (Se está pidiendo demostrar una parte del teorema de Weierstrass)

Ejercicio 2 (20 puntos)

Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
Realizar un bosquejo de D y calcular su volumen.