

## Práctico 10 – Integrales iteradas, integrales múltiples.

1. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de  $f$  sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresar las integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy \quad \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx \quad \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad \int_1^e \int_0^{\log(x)} f(x, y) dy dx$$

2. Calcular las siguientes integrales iteradas en el orden dado y en el orden inverso

a)  $\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} yx^2 dx \right) dy$

b)  $\int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} xy dx \right) dy$

3. Calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$  en cada uno de los siguientes casos:

a)  $f(x, y) = 2x - y$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}$ .

b)  $f(x, y) = 4x^2 - y^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

c)  $f(x, y) = xy^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y + 1\}$ .

d)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$ .

e)  $f(x, y) = xy$  y  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ ;  $D_2 = D_1 \cap \{y \geq 0\}$ .

f)  $f(x, y) = x^2y^2$  y  $D$  la región del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 4x$ .

g)  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$  y  $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$

h)  $f(x, y) = \frac{e^{\frac{tx}{y}}}{y^3}$  y  $D = [0, t] \times [1, t]$

4. Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal.

Calcular el área de  $T(D)$ , para  $D$

a)  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

b)  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

5. Calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$  en cada uno de los siguientes casos haciendo cambios de variable convenientes.

a)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ .

b)  $f(x, y) = x + y$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ .

d)  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$  y  $D$  el triángulo de lados  $y = x$ ,  $y = -x$  y  $x = 1$ . Se sugiere pasar a polares.

e)  $f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y)$  y  $D$  el cuadrado de vértices  $(0, \pi)$ ,  $(2\pi, \pi)$  y  $(\pi, 2\pi)$ .

6. Calcular en cada caso el área del conjunto  $D$ .

a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1\}$ .

- b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2} \leq y \leq 1\}$ .
- c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 \geq |r|\}$ , con  $r > 1$ .
- d)  $D$  comprendido entre  $x = y^2$  y  $x = 4 - y^2$ .
7. Calcular en cada caso el volumen del conjunto  $D$ .
- a)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ .
- b)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .
- c)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 \geq r|x|\}$  con  $r > 0$ .
- d)  $D$  comprendido entre  $z = x^2$  y  $z = 4 - x^2 - y^2$ .
- e)  $D$  es la intersección de la bola  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  con el cilindro  $2x^2 + y^2 - 2x \leq 0$
8. Calcular  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  en los siguientes casos:
- a)  $f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$  y  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y, 0 \leq x, 0 \leq z, x + y + z \leq 1\}$ .
- b)  $f(x, y, z) = x$  y  $D$  la región limitada por  $z = 0, y = 0, y = x, x + y = 2$  y  $x + y + z = 6$ .
- c)  $f(x, y, z) = xyz$  y  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y, 0 \leq x, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .
- d)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $D$  la región limitada por  $z = 0, z = 1$  y  $z^2 = x^2 + y^2$ .
- e)  $f(x, y, z) = z$  y  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b\}$ .
- f)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  y  $D$  la región limitada por  $x^2 + y^2 = 2x, z = 0$  y  $z = 2$ .
9. Sea  $S$  el sólido determinado por las condiciones  $z \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq z^2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ . Pasando a coordenadas cilíndricas calcular  $\iiint_S z dx dy dz$ .
10. Dado  $r > 0$  sean  $I(r) = \int_{-r}^r e^{-u^2} du$  y  $R = [-r, r] \times [-r, r]$
- a) Demostrar que  $I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
- b) Sean  $C_1$  y  $C_2$  los círculos inscrito y circunscrito a  $R$  respectivamente. Demostrar que
- $$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$
- c) Haciendo un cambio a coordenadas polares calcular
- $$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ y } \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$
- d) Tomando límite  $r \rightarrow \infty$  probar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$

## Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (**Examen diciembre 2023**) Sea  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .

Realizar un bosquejo de  $D$  y calcular su volumen.

2. (**Segundo parcial segundo semestre 2023**) Sea  $f(x, y)$  una función integrable, y considere la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

Entonces una forma equivalente de escribir la integral es:

$$(A) \int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{(x-2)^2} f(x, y) dy dx \quad (B) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy dx$$

$$(C) \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{x-2}} f(x, y) dy dx \quad (D) \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{\sqrt{x-2}} f(x, y) dy dx$$

$$(E) \int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy dx$$

3. (**Segundo parcial primer semestre 2023**)

a) Sea  $D$  la región cerrada y acotada del plano delimitada por la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Encontrar un cambio de variable que transforme a  $D$  en un círculo.

b) Sea  $S$  la región cerrada y acotada de  $\mathbb{R}^3$  definida por:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z \leq 1 \right\}.$$

- 1) Representar gráficamente la región  $S$ .
- 2) Calcular el volumen de  $S$ .

4. (**Examen febrero 2023**) Considere la siguiente integral doble

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dy dx.$$

- a) Dibujar la región de integración en el plano.
- b) Plantear una integral doble que represente a la anterior integral cambiando el orden de integración.
- c) Encontrar el valor de la integral del ítem anterior.

5. (**Examen diciembre 2022**) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = y$  y  $D \subset \mathbb{R}^2$  el conjunto definido como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x\}$$

La integral de  $f$  en  $D$  es igual a:

$$(A) \iint_D f = \frac{\pi}{3} \quad (B) \iint_D f = 1 \quad (C) \iint_D f = \sqrt{\pi}$$

$$(D) \iint_D f = \frac{3}{4} \quad (E) \iint_D f = \frac{1}{6}$$



9. (**Segundo parcial primer semestre 2019**) Calcular el volumen  $V$  definido por:

$$V = \left\{ (x, y, z) : y \geq 0; -1 \leq z \leq 1; z \geq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \right\}.$$

10. (**Examen diciembre 2018**) Se considera el conjunto  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq x - z + 2\}$ . Indicar la opción correcta:

(A)  $\text{Vol}(V) = \frac{75}{8}\pi$

(B)  $\text{Vol}(V) = \frac{81}{32}\pi$

(C)  $\text{Vol}(V) = \frac{9}{4}\pi$

(D)  $\text{Vol}(V) = \frac{45}{8}\pi$

## Ejercicios complementarios

- Sea  $A$  un conjunto medible Jordan con interior no vacío. Probar que su medida de Jordan es positiva.
  - Demostrar que si  $\text{Int}(A) = \emptyset$  entonces  $\mu(A) = 0$
- Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  acotado, denotamos mediante  $\mu^+(A)$  el área por exceso de  $A$ .
  - Demostrar que si  $\mu^+(A) = 0$  entonces  $A$  es medible Jordan y  $\mu(A) = 0$
  - Sea  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  continua. Demostrar que el gráfico de  $f$

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) : x \in [a, b]; y = f(x)\}$$

es un conjunto medible Jordan en  $\mathbb{R}^2$  de medida nula.

- Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  acotado. Demostrar que  $A$  es medible Jordan sii  $\mu(\text{Fr}(A)) = 0$ . Dar un ejemplo de un conjunto acotado en el plano que no sea medible Jordan.
- Sea  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$  definido por  $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, \forall i \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ .  
Calcular el volumen de  $\Delta_n$
- Sean  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$  y  $h : U \rightarrow h(U) \subseteq \mathbb{R}^2$  dada por  $h(u, v) = (u + v, v - u^2)$ .
  - Probar que  $h$  es un cambio de coordenadas y hallar explícitamente  $h^{-1}$ .
  - Hallar  $Jh$  y  $\det(Jh)$  en un punto genérico. Hallar  $\det(J(h^{-1}))$  en  $(2, 0) = h(1, 1)$ .
  - Sea  $T$  el triángulo de lados  $u = 0, v = 0$  y  $u + v = 2$ . Calcular el área de  $S = h(T)$ .
- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ , pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

utilizando el Teorema de Fubini. Sugerencia: Defina la función  $g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  e integre sobre un rectángulo arbitrario  $R \subset \mathbb{R}^2$ . Luego justifique el hecho de que una función continua es nula si y solamente si su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula.

7. Sean  $m$  y  $n$  números naturales positivos. Se define

$$S(m, n) = \frac{1}{m^3 n^3} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n n^2 (m + 2i)^2 + m^2 j^2$$

Demostrar que existen, son iguales entre sí, y calcular los siguientes límites:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S(m, n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} S(m, n)$$

Sugerencia: Calcular  $\int_1^3 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy$ . Después escribir la integral doble anterior como límite de sumas de Riemann en particiones formadas por  $mn$  rectángulos  $R_{i,j}$  todos iguales, de ancho  $2/m$  y alto  $1/n$ , evaluando la función integrando para cada  $R_{i,j}$  en el punto de  $R_{i,j}$  con mayor abscisa y mayor ordenada.

8. (Examen Febrero 2016) Sean  $S_r$  una esfera de radio  $r$  con centro en el origen y  $C_r$  un cilindro de base circular de radio  $r/2$  de altura infinita y recto (o sea la base está incluida en un plano perpendicular al eje del cilindro) tal que su eje pasa por el centro de la esfera. Calcular los dos volúmenes delimitados por  $S_r$  y  $C_r$ .
9. Sea  $S$  un sólido en el espacio que tiene densidad (masa por unidad de volumen) conocida que llamamos  $f(x, y, z)$  para cada  $(x, y, z) \in S$ . Esto determina una función densidad  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos la masa de  $S$  como  $m(S) = \iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ . Sean  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  definidos por

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S x f(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S y f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S z f(x, y, z)$$

El punto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  es el centro de gravedad de  $S$ . Si consideramos el caso de  $f \equiv 1$  entonces  $m(S) = Vol(S)$  y a  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  se le llama centroide de  $S$  (que es un concepto geométrico)

- Probar que si  $f$  es constante entonces el centro de gravedad coincide con el centroide
- Hallar la masa del sólido comprendido entre dos esferas de radio de  $a$  y  $b$  contradas en  $(0, 0, 0)$ , suponiendo que la densidad es  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- Sea  $S$  un cono sólido circular recto de altura  $h$  y radio de la base  $R$ . Demostrar que la distancia del centroide a la base es  $\frac{1}{4}h$
- Determinar el centro de gravedad del cono de la parte anterior, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia a la base