Práctico 6 – Topología en $\mathbb{R}^n$

Nota: en $\mathbb{R}^n$, a menos que se aclare lo contrario, asumiremos que estamos trabajando con la distancia euclídia.

1. *a*) Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma si satisface las siguientes propiedades:
   (I) $N(u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ y $N(u) = 0$ sí y sólo sí $u = \vec{0}$
   (II) $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$
   (III) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

   Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas
   (i) $N((x, y)) = |x| + |y|$,
   (ii) $N((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
   (iii) $N((x, y)) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$,
   (iv) $N((x, y)) = |x + y|$.

   b) Para aquellas que sean normas, dibujar la bola de centro en el origen y radio 1. Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro $(3, 4)$ y radio 2: $(3, 4), (4, 5), (0, 1)$.

   c) Decimos que dos normas N_1, N_2 son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$. Probar que aquellas funciones que son normas de este ejercicio son equivalentes dos a dos.

2. Se definen los siguientes conjuntos:

   $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$,
   $B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$
   $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$
   $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$,
   $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$
   $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$
   $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$,
   $A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

   a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.
   b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.
   c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
   d) Indicar si son abiertos.
   e) Indicar si son cerrados.
   f) Indicar si son compactos.

3. *a*) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.
   b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A - p$ es abierto.

4. Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Hallar $int(C)$, $\overline{C}$, y ∂C.

5. Sean A y B dos conjuntos $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto suma $A+B$ de la siguiente forma:

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

   a) Demostrar que si A es abierto $A+B$ es abierto.

   b) ¿Qué se puede decir de $A+B$ si A es cerrado?

6. Probar los siguientes resultados.

   a) A es abierto sii $A\cap\partial A=\emptyset$.

   b) $int(A)=\bar{A}-\partial A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el "mayor" conjunto abierto incluido en A).

   c) A es cerrado sii $\partial A\subset A$ sii $A'\subset A$.

   d) $\bar{A}=A\cup\partial A$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el "menor" cerrado que contiene a A).

   e) A' es un conjunto cerrado.

7. *a*) Probar que la unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

   b) Probar que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

   c) ¿Es cierto que la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto?

   d) Extraer conclusiones sobre la unión e intersección de conjuntos cerrados.

8. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$. En caso de no convergencia, determinar la existencia de subsucesiones convergentes y calcularlas

$$a_n=\left(e^{-n},\frac{3}{n}\right),\qquad b_n=\left(e^{-n}+2,[1+(-1)^n]n\right),\qquad c_n=\left((-1)^n,(-1)^n+\frac{1}{n}\right).$$

$$d_n=\Big(n((-1)^n+1),e\Big),\quad e_n=\left(\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right),\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

9. *a*) Sea x_n una sucesion en $\mathbb{R}^n$. Probar que si una sucesión tiene límite, entonces toda subsucesión tiene el mismo límite.

   b) Sea x_n una sucesion en $\mathbb{R}^2$, tal que $x_n\to p$ y sea $A=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$. Hallar $int(A)$, $\overline{A}$, A', ∂A.

   c) Demostrar que un punto a es de acumulación de un conjunto X sii existe una sucesión $(x_k)\subset X-\{a\}$ que converge a a.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial segundo semestre 2022***) Considere el conjunto

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2<1,\,y\geq|x|\right\}$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) A es un conjunto abierto.

(II) $\bar{A}=A$.

(III) $(0,1/2)$ es un punto de acumulación de A.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solo la afirmación (I) es verdadera.
(C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(D) Solo la afirmación (III) es verdadera.
(E) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.

2. (***Examen febrero 2022***) Recordemos que el plano complejo $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, considerando que el número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consideremos el siguiente subconjunto del plano complejo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z\bar{z} > 2,\ \mathrm{Re}(z) > 1,\ \mathrm{Im}(e^z) = 0\}.$$

Si ahora pensamos en A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) A es abierto, es acotado, y acumula en $(1, 1)$.
(B) A no es abierto, es acotado, y acumula en $(1, 1)$.
(C) A no es abierto, es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.
(D) A es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.
(E) A no es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1, 1)$.
(F) A no es abierto, no es acotado, y acumula en $(1, 1)$.

3. (***Examen diciembre 2021***) Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido como:

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x) = 0\ ,\ \sin(y) = -1\big\}$$

Considere las siguientes afirmaciones sobre el conjunto B:

(I) $\mathrm{int}(B) = \emptyset$.
(II) B es cerrado.
(III) Todos los elementos de B son puntos de acumulación de B^c.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solamente las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(C) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
(D) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(E) Todas las afirmaciones son falsas.

4. (***Primer parcial segundo semestre 2021***) Consideremos la sucesión en $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$a_n = \left(\frac{(1 - e^{\frac{1}{n^2}})n^2}{3}, \frac{(-1)^n \log(n)}{\log(2n + 1)} \right),\ n \geq 1$$

Entonces:

(A) $(a_n)_{n\geq1}$ converge a $(-1/3, 0)$.
(B) $(a_n)_{n\geq1}$ converge a $(1/3, 0)$.
(C) $(a_n)_{n\geq1}$ está acotada, y tiene subsucesiones que convergen a $(-1/3, 1)$ y $(-1/3, -1)$.
(D) $(a_n)_{n\geq1}$ está acotada, y tiene subsucesiones que convergen a $(1/3, 1)$ y $(1/3, -1)$.
(E) $(a_n)_{n\geq1}$ no está acotada.

5. (***Primer parcial primer semestre 2019***) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Definir interior del conjunto A.
   (b) Definir punto de acumulación del conjunto A.
   (c) Considerar el conjunto A del plano definido como:
   $$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\} \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^c$$
   Representar gráficamente los puntos de acumulación de A que no son interiores. Justificar.

6. (***Primer parcial segundo semestre 2018***) Se considera conjunto $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1/n\right\}$.
   Determinar la opción correcta:
   (A) $\partial B \cap B = \emptyset$
   (B) B es un conjunto cerrado.
   (C) $B' \cup B = \emptyset$.
   (D) $A \subset \bar{B}$, donde $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$

Ejercicios opcionales

1. **Distancia entre dos conjuntos**
   Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos no vacíos. Definimos la distancia entre los conjuntos A y B de la siguiente manera:
   $$d(A, B) := \text{ínf}\,\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$
   $a)$ Mostrar que $d(A, B) = 0$ si $A \cap B \neq \emptyset$, en particular $d(A, A) = 0$.
   $b)$ Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que $d(A, B) = 0$ y sin embargo $A \cap B = \emptyset$
   $c)$ Mostrar que si A y B son compactos entonces $A \cap B \neq \emptyset$ sí y sólo si $d(A, B) = 0$.

2. **El Conjunto de Cantor**
   $a)$ Sea $(K_m)_{m\geq 0}$ una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, es decir que:
   - $K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y no vacío $\forall m \geq 0$.
   - $K_{m+1} \subseteq K_m$.

   Probar que $K = \cap_{n=0}^{\infty} K_m$ es compacto y no vacío.
   $b)$ Nos limitaremos ahora al caso $n = 1$. Se define la sucesión $(K_m)_m \geq 0$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ mediante el siguiente procedimiento: $K_0 = [0; 1]$, $K_1 = K_0 - (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $K_2 = K_1 - [(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}; \frac{8}{9})]$,... En general, K_{m+1} se obtiene de K_m quitándole los tercios centrales abiertos de cada uno de los intervalos que forman K_m. Sea $K = \cap_{m=0}^{\infty} K_m$ (denominado Çonjunto de Cantor"). Probar que:
   - K es compacto y no vacío.
   - $K = K'$
   - K tiene interior vacío.

   $c)$ Observar que cada número real $x \in [0; 1]$ admite una representación "ternaria"de la forma:
   $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \quad con \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2, \}$$
   ¿Cómo es la representación ternaria de los puntos del Conjunto de Cantor? Deducir que K no es numerable.

d) ¿Cuál es la "longitud"de $[0;1] - K$?

3. Sea $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión contractiva, es decir, tal que existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, que cumple $\forall n \geq 0$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$$

Demostrar que:

a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\| \; \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si p, $q \in \mathbb{N}$, $p > q$, entonces $\|x_p - x_q\| \leq \frac{k^q}{1-k}\|x_1 - x_0\|$ Sugerencia: usar la desigualdad triangular.

c) $(x_n)_{n\geq 0}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

4. a) Sea x_k una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $||x_k|| \to \infty$. Probar que x_k no tiene ninguna subsucesión convergente.

b) De un ejemplo de una sucesión no acotada, pero que sí contenga alguna subsucesión convergente. ¿Esto contradice lo pedido en el item anterior? ¿Por qué?

5. Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, es convexo si para todo par de puntos $p, q \in A$ se tiene que el segmento que los une está incluido en él. Es decir $\forall p, q \in A$ se tiene que $[p, q] = \{tp + (1-t)q, t \in [0,1]\} \subset A$,

a) Probar que si $V \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio, entonces es convexo

b) Probar que en $\mathbb{R}^3$ un semi-espacio, un semi-plano y una semi-recta son convexos

c) Probar que si $A_i,\; i \in I$ son conjuntos convexos y $A = \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ entonces A es convexo.

d) Sea N una norma en $\mathbb{R}^n$. Probar que $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1\}$, es un conjunto convexo.

e) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^∞. Definimos el conjunto $A_f \subset \mathbb{R}^2$ como $A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$. Probar que A_f es convexo si solo si $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que A_f es convexo. Probar que f es continua