# Práctico 4 – Series

1. Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando sus suma en caso de serlo.

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}5^{n+1} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+3)}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\operatorname{arc\,tg}(n+1)-(n+1)\operatorname{arc\,tg}(n)}{n(n+1)}$$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de comparación.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\sqrt{n+1}}$$

3. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio del equivalente.

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n^3} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$$

4. Usar el criterio del cociente para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$$

5. Usar el criterio de la raíz para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

6. Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué.

$$a)\ \sum\frac{1}{a_n} \qquad b)\ \sum a_n^2 \qquad c)\ \sum\sqrt{a_n} \qquad d)\ \sum\log(1+a_n)$$

7. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{6n-5} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$$

8. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{e^n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

9. Sea $R$ un rectángulo de lado 1. Se trazan lineas de forma de dividir $R$ en 9 rectángulos iguales de lado $\frac{1}{3}$, y se pinta el rectángulo del centro. Inductivamente, se divide cada rectángulo sin pintar en 9 rectángulos y se pinta el del centro.

   - Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento $n$ veces.
   - Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento infinitas veces.

   Realice el mismo tipo de estudio pero ahora con el perímetro del área pintada.

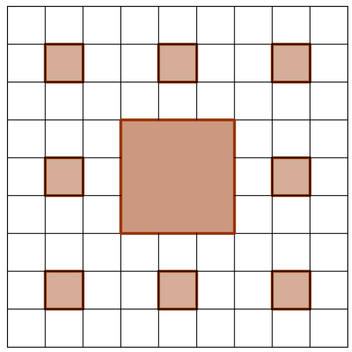

Figura 1: Figura que se obtiene en el paso 2.

## Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial segundo semestre 2022***) Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

   (1) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es convergente.

   (2) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.

   (3) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2)\cdot\log(3)\cdot\log(4)\cdots\log(n)}{n!}$ es convergente.

   Entonces:

   (A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
   (B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
   (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
   (D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
   (E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

2. (***Primer parcial segundo semestre 2021***) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + e^{-(n+1)^2} - e^{-n^2}\right)$$

   (A) converge a $\frac{3}{2}$. (B) converge a $\frac{1}{2}$. (C) converge a 1.
   (D) converge a $3-e$. (E) diverge.

3. (***Primer parcial segundo semestre 2020 turno matutino***) Sea $a_n$ una sucesión de términos positivos tal que $\sum a_n$ es convergente. Considere las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n^2} - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)\,\text{sen}(a_n)$$

Entonces:

(A) Ambas series son divergentes.
(B) Ambas series son convergentes.
(C) Solo la primera serie es convergente.
(D) Solo la segunda serie es convergente.
(E) La segunda serie no se puede clasificar a priori, por no ser de signo constante.

4. (***Primer parcial segundo semestre 2019***)

(1) Probar que si $\sum a_n$ es convergente entonces $\lim_n a_n = 0$.

(2) Enunciar y probar el criterio del cociente.

(3) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5n + 1}{\pi n^3 + 2n}$$

(4) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5. (***Primer parcial primer semestre 2018***) Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 2 metros. Cada vez que toca el piso rebota y se eleva hasta una altura de 2/3 de la distancia desde la que cae.

Interpretando la distancia que recorre la pelota luego de infinitos rebotes como suma de una serie infinita, indicar la opción correcta.

(A) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 4 metros.
(B) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 6 metros.
(C) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 8 metros.
(D) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 10 metros.
(E) Para rebotar infinitas veces la pelota debe recorrer una distancia infinita (i.e. la serie no converge).