Clase 26:

Teorema de Weierstrass. II

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Teorema de Weierstrass.

Caso funciones en una variable.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

intervalo cerrado y acotado

f es una función continua

$\Rightarrow$ Existen $m \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}$ tal que

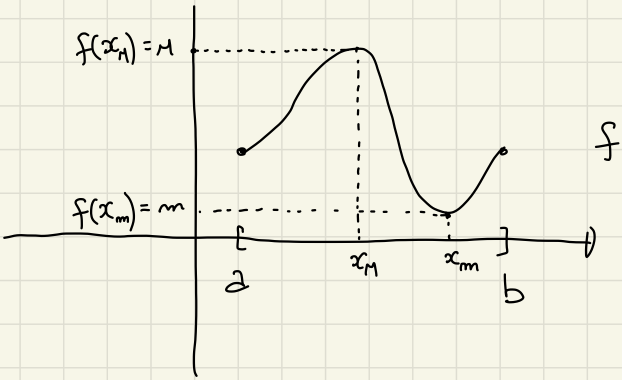
$m \leq f(x) \leq M$

y $m = f(x_m)$

$M = f(x_M)$.

para algun $x_m \in [a,b]$

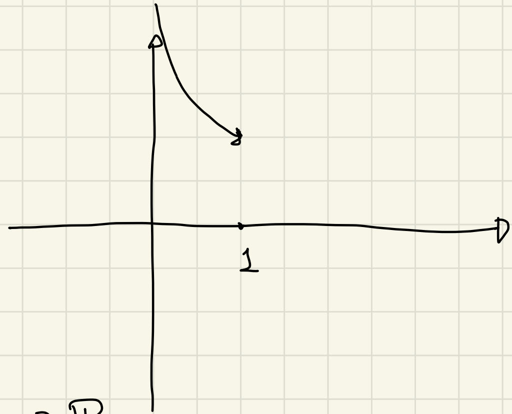
y $x_M \in [a,b]$



$f: [\cancel{a,b}] \longrightarrow \mathbb{R}$

intervalo ~~cerrado~~ y acotado

f es una función continua



$$f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$f: [\cancel{a,b}] \longrightarrow \mathbb{R}$

intervalo cerrado y ~~acotado~~

f es una función continua

$$f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

es continua y

no tiene máximo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x$$

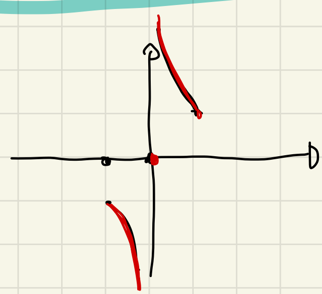
no tiene máximo ni mínimo.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

intervalo cerrado y acotado

f es una ~~función continua~~

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \quad x \in [-1,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Teorema de Weierstrass

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto compacto (cerrado y acotado)

$f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow \exists\ x_m$ y $x_M \in C$ tales que.

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$$

$\forall x \in C$.

Dem:

Probemos que f está acotada superiormente, razonando por absurdo.

Supongamos que f no está acotada superiormente ⊛ Abs

f está acotada superiormente sii $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M \quad \forall x \in C$

f no está acotada superiormente sii $\nexists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M \quad \forall x \in C$

f no está acotada superiormente sii $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \, x_k \in C$ tq $f(x_k) > k$

Como f no está acotada superiormente podemos construir una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tales que $f(x_k) > k$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty} \quad \circledast$$ (por construcción)

Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ y C es compacto $\Bigg\} \Rightarrow \exists$ una subsucesión $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C$ convergente a $x \in C$

$$\left.\begin{array}{l} \{x_{k_i}\} \subseteq C \qquad \lim\limits_{i\to+\infty} x_{k_i} = x \\ f \text{ es continua} \end{array}\right\} \underset{\text{teorema}}{\Longrightarrow}$$

$$(*) \quad \boxed{\lim_{i\to+\infty} f(x_{k_i}) = f(x)}$$

$(*)$ $\{f(x_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f(x_k)\}$

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{i\to+\infty} f(x_{k_i}) = +\infty} \quad (*)$$

$(*)$ Absurdo suponer que f no está acotada.

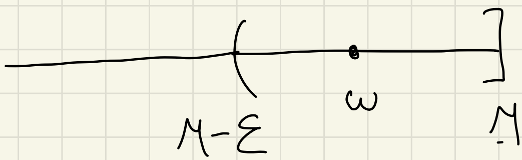
$\Rightarrow$ f está acotada superiormente

Sea $W = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente

$\Rightarrow$ existe $M = \sup W$

por Ax completitud en $\mathbb{R}$

$M = \sup W \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ w \in W$ tq



$$M - \varepsilon < w \leq M$$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \ w_k \in W$ y $x_k \in C$

$w_k = f(x_k)$ tq $\quad M - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq M$

Nos construimos una sucesión

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = M$

$$\left.\begin{array}{l}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C \\ C \text{ es conjunto compacto}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{existe una subsucesión } \{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ convergente a } x \in C$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{i\to+\infty} x_{k_i} = x \\ f \text{ es continua}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{i\to+\infty} f(x_{k_i}) = f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = M \\ \{f(x_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ es subsucesión de } \{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{i\to+\infty} f(x_{k_i}) = M$$

$$\Rightarrow f(x) = M$$

unicidad del límite

x_M

$\Rightarrow \exists\ x_M \in C$ tal que

$$f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in C$$

Ejercicio: Probar que $\exists\ x_m \in C$ tal que

$$m = f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in C.$$

① Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$

$$x^2+xy+y^2=0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & y & y^2 \end{array}$$

$$\boxed{x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2-4y^2}}{2}}$$

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{-3y^2}}{2}$$

$$x^2+xy+y^2=0 \iff (x,y)=(0,0)$$

$$D=\mathbb{R}^2$$

$$¿\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ ?$$

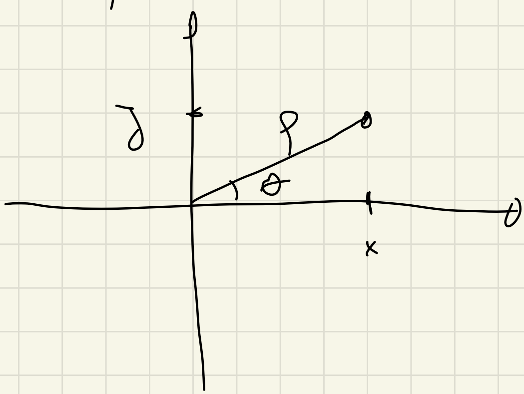
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

coordenadas polares

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$



$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$\nexists$

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} = \lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} \frac{x^2}{x^2+x^2+x^2} = \lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Los límites direccionales sobre las rectas $y=0$ e $y=x$ son distintos esto nos prueba que

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Investigar si $\exists\, a \in \mathbb{R}$ para el cual f es continua en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$$

coordenadas polares

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi)}} \rho\cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$$= \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \theta \in [0, 2\pi)}} \underbrace{\rho}_{\to 0} \cos\theta \, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$-1 \leq \odot \leq 1$$

$$= 0$$