Clase 6 :

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Tipos de ecuaciones que vamos a poder resolver:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables

$$\boxed{y' = A(y)\,B(x)}$$ ✓

- Ecuaciones diferenciables lineales de primer orden

$$\boxed{y' + a(x)\,y = r(x)}$$ ✓

- Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\boxed{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(E) $\boxed{y'' + ay' + by = r(x)}$ $a, b \in \mathbb{R}$

(H) $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Teorema: La solución general de (E) es la solución general de (H) y_H más una solución particular de (E)

$$y_E = y_H + y_P$$

solución general de (E)

solución general de (H)

UNA solución de (E)

Método para resolver (H)

$$(H) \quad \boxed{y'' + ay' + by = 0} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Teorema: El espacio de soluciones de (H) es un espacio vectorial de dimensión 2.

Es decir, si encontremos y_1 e y_2 soluciones de (H) que son linealmente independientes como funciones entonces:

$$\boxed{y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

son todas las soluciones de (H)

Investiguemos si (H) tiene soluciones de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \qquad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$e^{\lambda x}$ es solución de (H) sii

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x}$ es solución de (H) $\Leftrightarrow$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Llamamos ecuación característica de (H) a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Caso 1 La ecuación caracteristica tiene dos raices reales distintas

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$ son solución de (H)

$$\Rightarrow \boxed{y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

es la solución general de (H)

Caso 2 La ecuación caracteristica tiene una raíz doble $\lambda = \frac{-a}{2}$

$e^{-\frac{a}{2}x}$ es solución de (H)

Nos falta encontrar otra solucion LI con $e^{-\frac{a}{2}x}$

Caso 3 La ecuación caracteristica no tiene soluciones reales, no tenemos soluciones de la forma $e^{\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

solución general caso 2: Veamos que

$$y_2(x) = x e^{-\frac{a}{2}x} \text{ es solución de } (H).$$

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \quad \text{con } a^2 = 4b$$

$$y(x) = x e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y'(x) = e^{-\frac{a}{2}x} + x \cdot e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(1 - \frac{a}{2}x\right)$$

$$y''(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{2}x\right) + e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}x - \frac{a}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(-a + \frac{a^2}{4}x\right)$$

$$y'' + a y' + \frac{a^2}{4} y = 0$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left(-a + \frac{a^2}{4}x\right) + a\, e^{-\frac{a}{2}x}\left(1 - \frac{a}{2}x\right) + \frac{a^2}{4} x\, e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(\cancel{-a} + \cancel{\frac{a^2}{4}x} + \cancel{a} - \cancel{\frac{a^2}{2}x} \cancel{+\frac{a^2}{4}x}\right)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot 0 = 0$$

efectivamente $x e^{-\frac{a}{2}x}$ es solucion de (H)

caso 2

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x\, e^{-\frac{a}{2}x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

es la solución general de (H) cuando la ecuación característica tiene una raíz doble $-\frac{a}{2}$

Caso 3: La ecuación característica tiene raices complejas. $\alpha \pm iB$

Veamos que

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(Bx) \quad \text{é} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(Bx)$$

son soluciones de (H)

Verifiquemos que $y_1 + i y_2$ es una solución compleja de (H)

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

$\lambda = \alpha \pm Bi$ es solución de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$\begin{aligned}(y_1 + iy_2)' &= \alpha . e^{\alpha x}\cos Bx - e^{\alpha x}. B\operatorname{sen}Bx \\ &\quad + i\left(\alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}Bx + e^{\alpha x}. B\cos Bx\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\alpha\cos Bx - B\operatorname{sen}Bx \right. \\ &\quad \left. + i\alpha\operatorname{sen}Bx + iB\cos Bx\right) \\ &= e^{\alpha x}\left((\alpha + Bi)\cos Bx + (\alpha i - B)\operatorname{sen}Bx\right)\end{aligned}$$

$$\left(y_1 + i y_2\right)'' = e^{\alpha x}\left((\alpha + i\beta)^2 \left(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x\right)\right)$$

ejercicio probar

$y_1 + i y_2$ es solución de (H) si

$$e^{\alpha x}\left((\alpha+i\beta)^2\left(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x\right) + a\left((\alpha+\beta i)\cos\beta x + (\alpha i - \beta)\operatorname{sen}\beta x\right) + b\left(\cos\beta x + i\operatorname{sen}\beta x\right)\right) = 0$$

Probar que esto es efectivamente 0 usando que

$\alpha + \beta i$ es raiz de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

caso 3

$$\boxed{y_H = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

es la solución general de (H) cuando $\alpha \pm \beta i$ es raiz de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Ejemplo: Resolver $y'' + 2y' + 2y = 0$

con condiciones iniciales

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = 5$$

La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

tiene raíces

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$= -1 \pm 1i = \alpha \pm Bi$$

caso 3

$$\alpha = -1$$

$$B = 1$$

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{-x} \cdot \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x}$$

$$y(0) = c_1 \cdot 1 \cos 0 = c_1 = 2$$

$$y'(x) = \left(e^{-x}\left(2\cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right)\right)'$$

$$= -e^{-x}\left(2\cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right)$$

$$+ e^{-x}\left(-2\operatorname{sen} x + c_2 \cos x\right)$$

$$= e^{-x}\left(-2\cos x - c_2 \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x + c_2 \cos x\right).$$

$$y'(0) = \left(-2 + c_2\right) = 5$$

$$\boxed{c_2 = 7}$$

$$\boxed{y_s(x) = 2e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\operatorname{sen} x}.$$