Clase 5 :

Ecuaciones lineales de primer orden

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Tipos de ecuaciones que vamos a poder resolver:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables

$$\boxed{y' = A(y)\,B(x)}$$

- Ecuaciones diferenciables lineales de primer orden

$$\boxed{y' + a(x)\,y = r(x)}$$

- Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\boxed{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Ejercicio: 1) Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\boxed{(E)\quad x^2y' + y(y-x) = 0}$$

Sugerencia: hacer el cambio de variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

2) Hallar la solución de (E) con la condición $y(1) = \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{-y(y-x)}{x^2} \overset{?}{=} A(y).B(x)$$

no vemos como separar las variables

$u = y/x \qquad u' = \frac{y'x - y}{x^2} \qquad u'x^2 = y'x - y$

$ux = y$

$$\boxed{y = ux}$$

$$y' = \frac{u'x^2 + y}{x} = \boxed{u'x + u = y'}$$

$$x^2y' + y(y-x) = 0$$

$$x^2(u'x+u)+(ux)(ux-x)=0$$

$$u'x^3+\cancel{ux^2}+u^2x^2-\cancel{ux^2}=0$$

$$u'x^3+u^2x^2=0$$

$$u'x^3=-u^2x^2$$

$$u'=-\frac{u^2x^2}{x^3}=-\frac{u^2}{x}$$

$$\boxed{u'=-u^2\cdot\frac{1}{x}}$$ (E)

$$A(u)\cdot B(x)$$

Ecuación de variables separables.

Si $u(x)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{u'}{u^2}=\dfrac{-1}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{u'}{u^2}\,dx=\int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2}=\int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -\operatorname{Log}|x| + c$$

$$u(x) = \frac{1}{\operatorname{Log}|x| - c}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{\operatorname{Log}|x| - c}}$$ es solución de (E)

$c \in \mathbb{R}$

Ejercicio: verificar

(2) $y(1) = \frac{1}{-c} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -2}$

La solución de (E) con condición inicial

$y(1) = \frac{1}{2}$ es

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{\operatorname{Log}|x| + 2}}$$

Ecuación diferencial de primer orden homogénea

$$\boxed{(H) \quad y' + a(x)\,y = 0}$$

Esta ecuación la podemos escribir

$$y' = -a(x)\,y$$

que es una ecuación de variables separables.

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -a(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y}\,dx = \int -a(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad L|y| = \int -a(x)\,dx + C$$

$$|y| = e^{\int -a(x)dx + c} = \underbrace{e^c}_{k} \cdot e^{\int -a(x)dx}$$

$k > 0$

$$y = \pm k e^{\int -a(x)dx}$$

$y=0$ también es una solución

Podemos escribir todas las soluciones de (H)

$$\boxed{y = k e^{\int -a(x)\, dx} \qquad k \in \mathbb{R}}$$

Ecuación diferencial de primer orden no homogénea

$$\boxed{(E) \quad y' + a(x)\,y = r(x).}$$

Si
- y_H es la solución general de la ecuación $y' + a(x)y = 0$
- y_P es una solución particular de (E)

$$\Rightarrow \boxed{y_E = y_H + y_P}$$ es la solución general de (E).

Para hallar y_P vamos a usar un método llamado método de variación de constantes.

Buscamos y_p de la forma.

$$k(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

$y_p = k(x)\, e^{-\int a(x)dx}$ es solución de (E)

$$y_p' = k'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + k(x)\, e^{-\int a(x)dx} \cdot (-a(x))$$

$$\boxed{(E) \quad y' + a(x)\, y = r(x).}$$

$$k'(x)\, e^{-\int a(x)dx} \underbrace{\cancel{- k(x)\, e^{-\int a(x)dx}\, a(x)}} + \underbrace{\cancel{a(x)\, k(x)\, e^{-\int a(x)dx}}}$$

$$= r(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = r(x)$$

$$k'(x) = r(x)\, e^{\int a(x)dx}$$

$$k(x) = \int r(x)\, e^{\int a(x)dx}$$

$$\boxed{y_p = \left(\int r(x)\, e^{\int a(x)dx}\right)\left(e^{-\int a(x)dx}\right)}$$

Ejemplo: $y' = \cos x\, y + \cos x$

$$y' - \cos x\, y = \cos x \qquad (E)$$

$$y' - \cos x\, y = 0 \qquad (H).$$

Paso 1 resolvemos la ecuación homogénea

$$y' - \cos x\, y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = \cos x\, y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} = \int \cos x \; + C$$

$$\log|y| = \operatorname{sen} x + c$$

$$|y| = e^{c} \cdot e^{\operatorname{sen} x}$$

$k = e^{c}$, > 0

$$y = \pm k e^{\operatorname{sen} x}$$

$y = 0$ es solución constante.

$$\boxed{y_H = k e^{\operatorname{sen} x}}$$

$k \in \mathbb{R}$.

solución general de (H)

Paso 2: Hallamos y_p usando el método de variación de constantes.

$$y_p = k(x) e^{\operatorname{sen} x}$$

y_p es solución de (E) si verifica

$$y_p' - \cos x \, y_p = \cos x$$

$$y_p' = k'(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} + k(x) e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

$$\underbrace{k'(x) e^{\operatorname{sen} x} + \cancel{k(x) e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}} - \underbrace{\cancel{\cos x \, k(x) e^{\operatorname{sen} x}}}$$

$$= \cos x$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) e^{\operatorname{sen} x} = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = e^{-\operatorname{sen} x} \cos x$$

$$k(x) = \int e^{-\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = \cos x \, dx$

$$= \int e^{-u} \, du = -e^{-u}$$

$$\boxed{k(x) = -e^{-\operatorname{sen} x}}$$

$$y_p(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} \cdot e^{\operatorname{sen} x} = -1$$

$$\boxed{y_p(x) = -1}$$

Paso 3:

$$\boxed{y_{(E)}(x) = \underbrace{k e^{\operatorname{sen} x}}_{y_H(x)} \underbrace{- 1}_{+\ y_p(x)} \quad k \in \mathbb{R}}$$

Verifiquemos que efectivamente

$$y_E(x) = k e^{\operatorname{sen} x} - 1$$

es solución de

$$\boxed{(E) \qquad y' = \cos x\, y + \cos x}$$

$$y_E' = k \cdot e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

$$y_E = k e^{\operatorname{sen} x} - 1$$

$$\cos x \cdot y_E + \cos x = \cos x \left(k e^{\operatorname{sen} x} - 1\right) + \cos x$$

$$= \cos x \cdot k\, e^{\operatorname{sen} x} - \cancel{\cos x} + \cancel{\cos x}$$

$$= \cos x\, k\, e^{\operatorname{sen} x}$$

$$= y'_E$$