Examen - Matemática Discreta I

Miércoles 7 de febrero de 2024

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Tenga cuidado al pasar las respuestas; lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir. Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros ("Des. 1", "Des. 2" y "Puntaje Total") no se deben llenar y son para uso docente.

***Ejercicios de múltiple opción*:** cada respuesta correcta suma 10 puntos; respuestas incorrectas restan 2 puntos. No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción.

***Ejercicios de desarrollo*:** los dos ejercicios de desarrollo (correctos y completos) suman 25 puntos cada uno. Se debe entregar los desarrollos escritos en lapicera.

▶ El examen se aprueba con un mínimo de 60 puntos, y su duración es de 3 horas y media.

Múltiple Opción 1

Hallar el coeficiente en x^2y^3 del polinomio $(x - y + 3xy + 2)^5$.

(A) 1450 (B) 460 (C) -10 (D) -100 (E) -730

Múltiple Opción 2

Determinar la cantidad de enteros entre 1 y 462 (inclusive) que no son múltiplos ni de 3 ni de 7 ni de 11.

(A) 200 (B) 220 (C) 240 (D) 244 (E) 262

Múltiple Opción 3

Sea G el grafo que se obtiene tras agregar al ciclo C_8 precisamente 4 aristas, a saber, una arista para cada par de vértices de C_8 que se encuentran a distancia igual a 4.

Consideramos las siguientes afirmaciones:

I. El grafo G es 3-regular.
II. El grafo G es bipartito.
III. El grafo G tiene algún ciclo hamiltoniano.
IV. El grafo G es plano.

Indicar la opción correcta:

(A) Las afirmaciones II y IV son verdaderas, y las afirmaciones I y III son falsas.
(B) Las afirmaciones II y III son verdaderas, y las afirmaciones I y IV son falsas.
(C) Las afirmaciones I y IV son verdaderas, y las afirmaciones II y III son falsas.
(D) Las afirmaciones I y III son verdaderas, y las afirmaciones II y IV son falsas.
(E) Las afirmaciones I y II son verdaderas, y las afirmaciones III y IV son falsas.

Múltiple Opción 4

Hallar el menor entero natural n tal que, dados n dígitos diferentes (entre 0 y 9 inclusive), se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados difieran en un múltiplo de 6.

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Múltiple Opción 5

Se considera la sucesión definida por la relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 4^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Entonces:

(A) $a_n = \frac{1}{6}4^n - \frac{1}{6}(-2)^n$
(B) $a_n = (\frac{1}{24}n + \frac{5}{36})4^n - \frac{5}{36}(-2)^n$
(C) $a_n = (\frac{1}{36}n + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$
(D) $a_n = (\frac{1}{36}n^2 + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$
(E) $a_n = -\frac{5}{36}(-4)^n + \frac{5}{36}2^n + \frac{1}{24}n4^n$

Ejercicio de Desarrollo 1

Sea A un conjunto equipado con una relación de orden $\leq$. Se recuerda que $\leq$ es un *orden total* si para todos $x, y \in A$, tenemos que $x \leq y$ o $y \leq x$. Por otro lado, se dice que $\leq$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(1) Demostrar que si $\leq$ es un buen orden, entonces es un orden total.
(2) Demostrar que si $\leq$ es un orden total, entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.
(3) Concluir que si $\leq$ tiene dos elementos maximales distintos o dos elementos minimales distintos, entonces no es un buen orden.

Ejercicio de Desarrollo 2

El objetivo de este ejercicio es usar un principio de inducción para probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo entero $n \geq 1$. Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

(1) Indicar si se va a utilizar el principio de inducción simple o fuerte.
(2) Definir la propiedad sobre los naturales positivos $P(n)$ a la cual se le va a aplicar dicho principio de inducción.
(3) Enunciar el paso de base.
(4) Probar el paso de base.
(5) Enunciar el paso inductivo.
(6) Probar el paso inductivo.
(7) Concluir.