

# Examen - Matemática Discreta I

Miércoles 7 de febrero de 2024

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Tenga cuidado al pasar las respuestas; lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir. Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros (“Des. 1”, “Des. 2” y “Puntaje Total”) no se deben llenar y son para uso docente.

**Ejercicios de múltiple opción:** cada respuesta correcta suma 10 puntos; respuestas incorrectas restan 2 puntos. No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción.

**Ejercicios de desarrollo:** los dos ejercicios de desarrollo (correctos y completos) suman 25 puntos cada uno. Se debe entregar los desarrollos escritos en lapicera.

► El examen se aprueba con un mínimo de 60 puntos, y su duración es de 3 horas y media.

## Múltiple Opción 1

Determinar la cantidad de enteros entre 1 y 462 (inclusive) que no son múltiplos ni de 3 ni de 7 ni de 11.

- (A) 262    (B) 244    (C) 240    (D) 220    (E) 200

## Múltiple Opción 2

Hallar el menor entero natural  $n$  tal que, dados  $n$  dígitos diferentes (entre 0 y 9 inclusive), se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados difieran en un múltiplo de 6.

- (A) 4    (B) 5    (C) 6    (D) 7    (E) 8

## Múltiple Opción 3

Se considera la sucesión definida por la relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 4^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

con  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ . Entonces:

- (A)  $a_n = -\frac{5}{36}(-4)^n + \frac{5}{36}2^n + \frac{1}{24}n4^n$   
(B)  $a_n = (\frac{1}{36}n^2 + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$   
(C)  $a_n = (\frac{1}{36}n + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$   
(D)  $a_n = (\frac{1}{24}n + \frac{5}{36})4^n - \frac{5}{36}(-2)^n$   
(E)  $a_n = \frac{1}{6}4^n - \frac{1}{6}(-2)^n$

## Múltiple Opción 4

Hallar el coeficiente en  $x^2y^3$  del polinomio  $(x - y + 3xy + 2)^5$ .

- (A) -730    (B) -100    (C) -10    (D) 460    (E) 1450

## Múltiple Opción 5

Sea  $G$  el grafo que se obtiene tras agregar al ciclo  $C_8$  precisamente 4 aristas, a saber, una arista para cada par de vértices de  $C_8$  que se encuentran a distancia igual a 4.

Consideramos las siguientes afirmaciones:

- I. El grafo  $G$  es 3-regular.
- II. El grafo  $G$  es bipartito.
- III. El grafo  $G$  tiene algún ciclo hamiltoniano.
- IV. El grafo  $G$  es plano.

Indicar la opción correcta:

- (A) Las afirmaciones I y II son verdaderas, y las afirmaciones III y IV son falsas.
- (B) Las afirmaciones I y III son verdaderas, y las afirmaciones II y IV son falsas.
- (C) Las afirmaciones I y IV son verdaderas, y las afirmaciones II y III son falsas.
- (D) Las afirmaciones II y III son verdaderas, y las afirmaciones I y IV son falsas.
- (E) Las afirmaciones II y IV son verdaderas, y las afirmaciones I y III son falsas.

## Ejercicio de Desarrollo 1

Sea  $A$  un conjunto equipado con una relación de orden  $\leq$ . Se recuerda que  $\leq$  es un *orden total* si para todos  $x, y \in A$ , tenemos que  $x \leq y$  o  $y \leq x$ . Por otro lado, se dice que  $\leq$  es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de  $A$  tiene mínimo.

- (1) Demostrar que si  $\leq$  es un buen orden, entonces es un orden total.
- (2) Demostrar que si  $\leq$  es un orden total, entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.
- (3) Concluir que si  $\leq$  tiene dos elementos maximales distintos o dos elementos minimales distintos, entonces no es un buen orden.

## Ejercicio de Desarrollo 2

El objetivo de este ejercicio es usar un principio de inducción para probar que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo entero  $n \geq 1$ . Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

- (1) Indicar si se va a utilizar el principio de inducción simple o fuerte.
- (2) Definir la propiedad sobre los naturales positivos  $P(n)$  a la cual se le va a aplicar dicho principio de inducción.
- (3) Enunciar el paso de base.
- (4) Probar el paso de base.
- (5) Enunciar el paso inductivo.
- (6) Probar el paso inductivo.
- (7) Concluir.