

Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 2 de febrero de 2024 (8:00 - 11:30)

0000

N.º de Examen

John Doe

Nombre y Apellido

0.000.000-0

Cédula de Identidad

J.D.

Firma

Instrucciones

- Identifique con sus datos completos el presente documento.
- Al finalizar, debe entregar este documento al personal docente.
- Debe colocar sus respuestas en las casillas que aparecen en esta página.
- Solamente se corregirá la información que esté dentro de las casillas.

Respuestas					
versión	VoF 1	VoF 2	VoF 3	VoF 4	VoF 5
1	F	V	F	F	V
2	F	F	V	V	F

Respuestas								
versión	MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6	MO 7	MO 8
1	B	F	A	E	D	C	A	F
2	E	A	F	B	C	D	F	D

Glosario

- Dados dos enteros positivos m y n , el espacio vectorial de las matrices de m filas y n columnas está denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.
 - Para $n = 1$, a $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$ se le conoce como el espacio de columnas de tamaño $m \times 1$.
 - Para $m = 1$, a $\mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$ se le conoce como el espacio de filas de tamaño $1 \times n$.
- Dada una matriz $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, el coeficiente ubicado en la fila i y en la columna j viene dado por a_{ij} .
- Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces A^t denota la matriz traspuesta de A .
- Si V es un espacio vectorial, entonces 0_V denota el elemento neutro de V .
 - En el caso donde $V = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, tal elemento neutro está denotado por $0_{m \times n}$ (la matriz de tamaño $m \times n$ con todas sus entradas iguales a 0).
- Si V es un espacio vectorial, su dimensión se denota por $\dim(V)$.
- Si W_1 y W_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V , entonces la suma de W_1 y W_2 se denota por $W_1 + W_2$. Cuando dicha suma es directa, entonces el subespacio suma se denota por $W_1 \oplus W_2$.
- Dada una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales V y W , el núcleo y la imagen de T serán denotados por $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, respectivamente.

Primera Parte: Verdadero o Falso

Puntajes: 20 puntos el total de esta parte. Se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

Enunciado: Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, y sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces:

- (1) Para $v \in V$, $T(v) = 0_W$ si, y solamente si, $v = 0_V$.

Solución: Falso. Si se toma T la transformación lineal nula, no se cumple la afirmación.

- (2) T es inyectiva si, y solamente si, $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T))$.

Solución: Verdadero. Aplique a T el Teorema de las Dimensiones.

- (3) T es sobreyectiva si, y solamente si, $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Solución: Falso. Tome $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ y $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la transformación lineal nula. Se tiene para esta elección que $\dim(V) = 2 > 1 = \dim(W)$ pero T no es sobreyectiva.

- (4) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente en W .

Solución: Falso. Si se toma T la transformación lineal nula, no se cumple la afirmación, ya que en este caso se tendría $T(\mathcal{B}) = \{0_W\}$, que es un conjunto linealmente dependiente.

- (5) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y T es sobreyectiva, entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera a W .

Solución: Verdadero. Ver teórico.

Para la versión 2 del examen, las afirmaciones son las mismas, y solamente cambia el orden de las afirmaciones.

Segunda Parte: Múltiple Opción

Puntajes: 80 puntos el total de esta parte. Se otorgan 10 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

MO 1. Considere el sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas x , y , y z dado por

$$(S): \begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

- (A) (S) es incompatible para infinitos valores de k . (D) (S) es compatible indeterminado para todo $k \in \mathbb{R}$.
(B) (S) es compatible indeterminado únicamente para un valor de k . (E) (S) es compatible determinado para todo $k \in \mathbb{R}$.
(C) (S) es compatible determinado únicamente para un valor de k . (F) (S) es compatible indeterminado para infinitos valores de k .

Solución: La respuesta correcta es **(B)** (o **(E)** en la versión 2). Consideramos la matriz ampliada de (S) y aplicamos operaciones elementales por filas para hallar una forma escalerizada y concluir.

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 2 & 2 \\ 1 & k & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \leftarrow (F_2 - k \cdot F_1) \\ F_3 \leftarrow (F_3 - F_1)}}{\substack{F_2 \leftarrow (F_2 - k \cdot F_1) \\ F_3 \leftarrow (F_3 - F_1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 2-k & 2-k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_2 \leftarrow (F_2 + F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2-k & 6-k-k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k \\ 0 & 0 & 2-k & 6-k-k^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vemos entonces que (S) es un sistema compatible determinado si, y solamente si, $k \neq 1$ y $k \neq 2$.

- Si $k = 1$, entonces $(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$. En este caso, (S) es incompatible.
- Si $k = 2$, entonces $(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. En este caso, (S) es compatible indeterminado.

MO 2. Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ la matriz con coeficientes dados por

$$a_{ij} = i - j$$

con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si $B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es la matriz con coeficientes dados por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j. \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces la tercera fila de la matriz $A^t \cdot B$ es igual a:

- | | |
|--|---|
| (A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$ | (D) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$ |
| (B) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$ | (E) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$ |
| (C) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$ | (F) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$ |

Solución: La respuesta correcta es **(F)** (o **(A)** en la versión 2). A partir de las definiciones de A y B , tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

MO 3. El determinante de la matriz $A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -7 & 1 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 10 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es igual a:

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 240. | (D) 300. |
| (B) 80. | (E) -240. |
| (C) -300. | (F) -80. |

Solución: La respuesta correcta es **(A)** (o **(F)** en la versión 2). La matriz A es una matriz por bloques. Entonces, usando la propiedad correspondiente del determinante, tenemos que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & 11 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz del segundo determinante es diagonal, por lo cual

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -3.$$

Por otro lado, el primer determinante se puede calcular mediante desarrollo por cofactores como sigue:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & 11 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2} 5 \det \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 5(10(-2) - 4(-1)) = 5(-16) = -80.$$

Por lo tanto, $\det(A) = (-3)(-80) = 240$.

MO 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación reducida viene dada por

$$3x + 2y + z = 6.$$

Por otro lado, considere las rectas r_1 y r_2 en $\mathbb{R}^3$, donde r_1 está definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda, \\ y = 1 + 4\lambda, \\ z = 1 + 2\lambda, \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

mientras que r_2 viene dada por la ecuación reducida

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-9}{3}.$$

Si P es el punto de intersección entre r_1 y π , entonces la distancia de P a r_2 es igual a:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (A) 4. | (D) 5. |
| (B) $2\sqrt{7}$. | (E) $4\sqrt{5}$. |
| (C) 20. | (F) $8\sqrt{2}$. |

Solución: La respuesta correcta es **(E)** (o **(B)** en la versión 2). Note que $\vec{n} = (3, 2, 1)$ es un vector normal al plano, y que r_1 y r_2 tienen por direcciones a los vectores $\vec{d}_1 = (6, 4, 2) = 2\vec{n}$ y $\vec{d}_2 = (9, 6, 3) = 3\vec{n}$, respectivamente. Entonces, r_1 y r_2 son perpendiculares a π . Por otro lado, los puntos $(1, 1, 1)$ por donde pasa r_1 , y $(1, -3, 9)$ por donde pasa r_2 , claramente satisfacen la ecuación del plano π . Por lo tanto, $P = (1, 1, 1)$ y la distancia de P a r_2 viene dada por la distancia de P a $(1, -3, 9)$, es decir,

$$\text{dist}(P, r_2) = \text{dist}((1, 1, 1), (1, -3, 9)) = \|(1, 1, 1) - (1, -3, 9)\| = \|(0, 4, -8)\| = 4\|(0, 1, -2)\| = 4\sqrt{5}.$$

MO 5. Considere el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{(t, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3t)\}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que existe un único valor de t para el cual S es linealmente dependiente. Entonces, para dicho t , el subespacio generado por S es:

- | | |
|--|---|
| (A) $\mathbb{R}^3$. | (D) El plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y con vector normal $(-2, -1, 2)$. |
| (B) La recta que pasa por los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$. | (E) El plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y con vector normal $(2, 2, 1)$. |
| (C) La recta que pasa por los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 2, 1)$. | (F) El plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y con vector normal $(2, 1, 2)$. |

Solución: La respuesta correcta es **(D)** (o **(C)** en la versión 2). Para averiguar el valor de t , calculamos el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores de S :

$$\det \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-t \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3t-1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1 & 3t-1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 4t-2 \end{pmatrix} = -2(2t-1).$$

Entonces, S es linealmente dependiente si, y solamente si, $t = 1/2$. En este caso,

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right), (1, 0, 1), \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\}.$$

Por otro lado, como

$$(1, 0, 1) = 2 \cdot \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right),$$

y además

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right), \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

es linealmente independiente, se tiene que el subespacio generado por S es el plano que pasa por el origen y con vectores de dirección

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right) \quad \text{y} \quad \left(1, 1, \frac{3}{2} \right).$$

Al tomar el producto vectorial entre estas dos direcciones obtenemos una normal a dicho plano:

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right) \wedge \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}(-2, -1, 2).$$

MO 6. Dentro del espacio vectorial real $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes subespacios:

$$\mathcal{L} = \{A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\},$$

$$\mathcal{U} = \{B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / b_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}.$$

Es decir, $\mathcal{L}$ es el subespacio formado por las matrices triangulares inferiores, y $\mathcal{U}$ el subespacio formado por las matrices triangulares superiores. Entonces:

- (A) $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{U}$. (D) $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) < 3$.
 (B) $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) > 3$. (E) $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3 \times 3}\}$.
 (C) $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3 \times 3}\}$. (F) $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} = \{0_{3 \times 3}\}$.

Solución: La respuesta correcta es **(C)** (o **(D)** en la versión 2). Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ se puede escribir como la suma de una matriz triangular superior con una matriz triangular inferior. En efecto, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{U} + \mathcal{L}$. Por otro lado, $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3 \times 3}\}$ por ser el subespacio formado por las matrices diagonales.

MO 7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y la recta r dada por la intersección de los planos

$$r = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $r \subseteq \text{Ker}(T)$ y $T(0, 0, 1) = (a, b)$, entonces:

- (A) $\text{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ si y solamente si $(a, b) = (0, 0)$. (D) $\dim(\text{Ker}(T)) \leq 1$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 (B) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ si $(a, b) \neq (0, 0)$. (E) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ si $(a, b) = (0, 0)$.
 (C) $\dim(\text{Ker}(T)) \leq 2$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (F) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ si $(a, b) \neq (0, 0)$.

Solución: La respuesta correcta es **(A)** (o **(F)** en la versión 2). La recta r es una recta contenida en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (el plano XY) y que no pasa por el origen. Entonces, como $\text{Ker}(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, se tiene que $\text{Ker}(T) \supseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Por otro lado, $(0, 0, 1) \notin \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Por lo tanto, $\text{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ si y solamente si $(a, b) = (0, 0)$.

Nota importante: Para la siguiente pregunta, se da por hecho un resultado teórico que afirma que para cada transformación lineal $T: \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ existe una única matriz fila $(a \ b \ c \ d) \in \mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R})$ tal que

$$T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = (a \ b \ c \ d) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = ax + by + cz + dt, \text{ para todo } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}).$$

Es decir, toda transformación lineal de $\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$ está unívocamente representada por una matriz fila en $\mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R})$.

MO 8. Considere el subconjunto de $\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

y sea $T: \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función que toma los siguientes valores en $\mathcal{S}$:

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4, \quad T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 8 \quad \text{y} \quad T \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 24.$$

Entonces:

(A) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $(a \ b \ c \ d)$ se tiene

$$a + b + c + d = 4.$$

(B) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $(a \ b \ c \ d)$ se tiene

$$a + b + c + d = 2.$$

(C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen con las condiciones anteriores.

(D) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $(a \ b \ c \ d)$ se tiene

$$a + b + c + d = 8.$$

(E) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $(a \ b \ c \ d)$ se tiene

$$a + b + c + d = 6.$$

(F) No existe ninguna transformación lineal T que cumpla con las condiciones anteriores.

Solución: La respuesta correcta es **(F)** (o **(D)** en la versión 2). De existir tal T , usando las primeras cuatro condiciones y la información de la nota, tenemos que

$$\begin{aligned} a &= T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, & a + b &= T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \\ a + b + c &= T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4, & a + b + c + d &= T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 8. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, usando la quinta condición, obtenemos además

$$\begin{aligned} 24 &= T \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = -2 \cdot T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + 3 \cdot T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ 24 &= -2(a+b) + (a+b+c) + 3(a+b+c+d) \\ 24 &= -2a - 2b + a + b + c + 3a + 3b + 3c + 3d \\ 24 &= 2a + 2b + 4c + 3d. \end{aligned}$$

Armamos así el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a &= 0, \\ a+b &= 0, \\ a+b+c &= 4, \\ a+b+c+d &= 8, \\ 2a+2b+4c+3d &= 24. \end{cases}$$

De las primeras cuatro ecuaciones, obtenemos $a = 0$, $b = 0$, $c = 4$ y $d = 4$. Por otro lado, sustituyendo los valores anteriores en la quinta ecuación, se tiene que

$$24 = 2a + 2b + 4c + 3d = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 16 + 12 = 28,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe ninguna transformación lineal que cumpla con las cinco condiciones del enunciado.