

# Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

v2

Viernes 2 de febrero de 2024 (8:00 - 11:30)

N.º de Examen

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

Firma

## Instrucciones

- Identifique con sus datos completos el presente documento.
- Al finalizar, debe entregar este documento al personal docente.
- Debe colocar sus respuestas en las casillas que aparecen en esta página.
- Solamente se corregirá la información que esté dentro de las casillas.

Respuestas				
VoF 1	VoF 2	VoF 3	VoF 4	VoF 5

Respuestas							
MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6	MO 7	MO 8

## Glosario

- Dados dos enteros positivos  $m$  y  $n$ , el espacio vectorial de las matrices de  $m$  filas y  $n$  columnas está denotado por  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ .
  - Para  $n = 1$ , a  $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$  se le conoce como el espacio de columnas de tamaño  $m \times 1$ .
  - Para  $m = 1$ , a  $\mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$  se le conoce como el espacio de filas de tamaño  $1 \times n$ .
- Dada una matriz  $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , el coeficiente ubicado en la fila  $i$  y en la columna  $j$  viene dado por  $a_{ij}$ .
- Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , entonces  $A^t$  denota la matriz traspuesta de  $A$ .
- Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces  $0_V$  denota el elemento neutro de  $V$ .
  - En el caso donde  $V = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , tal elemento neutro está denotado por  $0_{m \times n}$  (la matriz de tamaño  $m \times n$  con todas sus entradas iguales a 0).
- Si  $V$  es un espacio vectorial, su dimensión se denota por  $\dim(V)$ .
- Si  $W_1$  y  $W_2$  son dos subespacios de un espacio vectorial  $V$ , entonces la suma de  $W_1$  y  $W_2$  se denota por  $W_1 + W_2$ . Cuando dicha suma es directa, entonces el subespacio suma se denota por  $W_1 \oplus W_2$ .
- Dada una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , el núcleo y la imagen de  $T$  serán denotados por  $\text{Ker}(T)$  e  $\text{Im}(T)$ , respectivamente.

## Primera Parte: Verdadero o Falso

**Puntajes:** 20 puntos el total de esta parte. Se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

**Enunciado:** Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, y sea  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces:

- (1) Para  $v \in V$ ,  $T(v) = 0_W$  si, y solamente si,  $v = 0_V$ .
- (2)  $T$  es sobreyectiva si, y solamente si,  $\dim(V) \geq \dim(W)$ .
- (3)  $T$  es inyectiva si, y solamente si,  $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T))$ .
- (4) Si  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $T$  es sobreyectiva, entonces el conjunto  $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera a  $W$ .
- (5) Si  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces el conjunto  $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $W$ .

## Segunda Parte: Múltiple Opción

**Puntajes:** 80 puntos el total de esta parte. Se otorgan 10 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

**MO 1.** Considere el sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas  $x$ ,  $y$ , y  $z$  dado por

$$(S): \begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es un parámetro. Entonces:

- (A)  $(S)$  es incompatible para infinitos valores de  $k$ .      (D)  $(S)$  es compatible indeterminado para todo  $k \in \mathbb{R}$ .  
(B)  $(S)$  es compatible determinado para todo  $k \in \mathbb{R}$ .      (E)  $(S)$  es compatible indeterminado únicamente para un valor de  $k$ .  
(C)  $(S)$  es compatible indeterminado para infinitos valores de  $k$ .      (F)  $(S)$  es compatible determinado únicamente para un valor de  $k$ .

**MO 2.** Sea  $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  la matriz con coeficientes dados por

$$a_{ij} = i - j$$

con  $i \in \{1, 2, 3\}$  y  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Si  $B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  es la matriz con coeficientes dados por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j. \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , entonces la tercera fila de la matriz  $A^t \cdot B$  es igual a:

- (A)  $(-2 \quad -3 \quad -3)$ .      (D)  $(-2 \quad -1 \quad -3)$ .  
(B)  $(-2 \quad 1 \quad -3)$ .      (E)  $(-2 \quad -3 \quad 3)$ .  
(C)  $(2 \quad -3 \quad -3)$ .      (F)  $(2 \quad 1 \quad -3)$ .

**MO 3.** El determinante de la matriz  $A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -7 & 1 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 10 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es igual a:

- (A)  $-80$ .      (D)  $300$ .  
(B)  $-240$ .      (E)  $80$ .  
(C)  $-300$ .      (F)  $240$ .

**MO 4.** Sea  $\pi$  el plano en  $\mathbb{R}^3$  cuya ecuación reducida viene dada por

$$3x + 2y + z = 6.$$

Por otro lado, considere las rectas  $r_1$  y  $r_2$  en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $r_1$  está definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda, \\ y = 1 + 4\lambda, \\ z = 1 + 2\lambda, \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

mientras que  $r_2$  viene dada por la ecuación reducida

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-9}{3}.$$

Si  $P$  es el punto de intersección entre  $r_1$  y  $\pi$ , entonces la distancia de  $P$  a  $r_2$  es igual a:

- (A) 4. (D) 20.  
(B)  $4\sqrt{5}$ . (E)  $8\sqrt{2}$ .  
(C) 5. (F)  $2\sqrt{7}$ .

**MO 5.** Considere el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$S = \{(t, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3t)\}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que existe un único valor de  $t$  para el cual  $S$  es linealmente dependiente. Entonces, para dicho  $t$ , el subespacio generado por  $S$  es:

- (A) El plano que pasa por  $(0, 0, 0)$  y con vector normal  $(2, 2, 1)$ . (D) La recta que pasa por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 1)$ .  
(B) El plano que pasa por  $(0, 0, 0)$  y con vector normal  $(2, 1, 2)$ . (E) La recta que pasa por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(2, 2, 1)$ .  
(C) El plano que pasa por  $(0, 0, 0)$  y con vector normal  $(-2, -1, 2)$ . (F)  $\mathbb{R}^3$ .

**MO 6.** Dentro del espacio vectorial real  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  se consideran los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}, \\ \mathcal{U} &= \{B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / b_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}. \end{aligned}$$

Es decir,  $\mathcal{L}$  es el subespacio formado por las matrices triangulares inferiores, y  $\mathcal{U}$  el subespacio formado por las matrices triangulares superiores. Entonces:

- (A)  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{U}$ . (D)  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} + \mathcal{U}$  y  $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3 \times 3}\}$ .  
(B)  $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) > 3$ . (E)  $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) < 3$ .  
(C)  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$  y  $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3 \times 3}\}$ . (F)  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$  y  $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} = \{0_{3 \times 3}\}$ .

**MO 7.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal y la recta  $r$  dada por la intersección de los planos

$$r = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si  $r \subseteq \text{Ker}(T)$  y  $T(0, 0, 1) = (a, b)$ , entonces:

- (A)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$  si  $(a, b) = (0, 0)$ .  
 (B)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$  si  $(a, b) \neq (0, 0)$ .  
 (C)  $\dim(\text{Ker}(T)) \leq 1$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .  
 (D)  $\dim(\text{Ker}(T)) \leq 2$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .  
 (E)  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$  si  $(a, b) \neq (0, 0)$ .  
 (F)  $\text{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$  si y solamente si  $(a, b) = (0, 0)$ .

**Nota importante:** Para la siguiente pregunta, se da por hecho un resultado teórico que afirma que para cada transformación lineal  $T : \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  existe una única matriz fila  $(a \ b \ c \ d) \in \mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R})$  tal que

$$T \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = (a \ b \ c \ d) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = ax + by + cz + dt, \text{ para todo } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}).$$

Es decir, toda transformación lineal de  $\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}$  está unívocamente representada por una matriz fila en  $\mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R})$ .

**MO 8.** Considere el subconjunto de  $\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

y sea  $T : \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  una función que toma los siguientes valores en  $\mathcal{S}$ :

$$T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4, \quad T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 8 \quad \text{y} \quad T \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 24.$$

Entonces:

- (A) Existen infinitas transformaciones lineales  $T$  que cumplen con las condiciones anteriores.  
 (B) Existe una única transformación lineal  $T$  que cumple lo anterior, y para su correspondiente  $(a \ b \ c \ d)$  se tiene  $a + b + c + d = 2$ .  
 (C) Existe una única transformación lineal  $T$  que cumple lo anterior, y para su correspondiente  $(a \ b \ c \ d)$  se tiene  $a + b + c + d = 8$ .  
 (D) No existe ninguna transformación lineal  $T$  que cumpla con las condiciones anteriores.  
 (E) Existe una única transformación lineal  $T$  que cumple lo anterior, y para su correspondiente  $(a \ b \ c \ d)$  se tiene  $a + b + c + d = 4$ .  
 (F) Existe una única transformación lineal  $T$  que cumple lo anterior, y para su correspondiente  $(a \ b \ c \ d)$  se tiene  $a + b + c + d = 6$ .