Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

v1

Viernes 2 de febrero de 2024 (8:00 - 11:30)

N.º de Examen

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

Firma

Instrucciones

- Identifique con sus datos completos el presente documento.
- Al finalizar, debe entregar este documento al personal docente.
- Debe colocar sus respuestas en las casillas que aparecen en esta página.
- Solamente se corregirá la información que esté dentro de las casillas.

Respuestas				
VoF 1	VoF 2	VoF 3	VoF 4	VoF 5

Respuestas							
MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6	MO 7	MO 8

Glosario

- Dados dos enteros positivos m y n, el espacio vectorial de las matrices de m filas y n columnas está denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
  - Para $n = 1$, a $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ se le conoce como el espacio de columnas de tamaño $m \times 1$.
  - Para $m = 1$, a $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ se le conoce como el espacio de filas de tamaño $1 \times n$.

- Dada una matriz $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el coeficiente ubicado en la fila i y en la columna j viene dado por a_{ij}.

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces A^t denota la matriz traspuesta de A.

- Si V es un espacio vectorial, entonces 0_V denota el elemento neutro de V.
  - En el caso donde $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal elemento neutro está denotado por $0_{m\times n}$ (la matriz de tamaño $m \times n$ con todas sus entradas iguales a 0).

- Si V es un espacio vectorial, su dimensión se denota por $\dim(V)$.

- Si W_1 y W_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V, entonces la suma de W_1 y W_2 se denota por $W_1 + W_2$. Cuando dicha suma es directa, entonces el subespacio suma se denota por $W_1 \oplus W_2$.

- Dada una transformación lineal $T\colon V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W, el núcleo y la imagen de T serán denotados por $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, respectivamente.

Primera Parte: Verdadero o Falso

Puntajes: 20 puntos el total de esta parte. Se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

Enunciado: Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

(1) Para $v \in V$, $T(v) = 0_W$ si, y solamente si, $v = 0_V$.

(2) T es inyectiva si, y solamente si, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

(3) T es sobreyectiva si, y solamente si, $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(4) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente en W.

(5) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y T es sobreyectiva, entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a W.

Segunda Parte: Múltiple Opción

Puntajes: 80 puntos el total de esta parte. Se otorgan 10 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

MO 1. Considere el sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas x, y, y z dado por

$$(S): \begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

(A) (S) es incompatible para infinitos valores de k.

(B) (S) es compatible indeterminado únicamente para un valor de k.

(C) (S) es compatible determinado únicamente para un valor de k.

(D) (S) es compatible indeterminado para todo $k \in \mathbb{R}$.

(E) (S) es compatible determinado para todo $k \in \mathbb{R}$.

(F) (S) es compatible indeterminado para infinitos valores de k.

MO 2. Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz con coeficientes dados por

$$a_{ij} = i - j$$

con $i \in \{1,2,3\}$ y $j \in \{1,2,3,4\}$. Si $B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es la matriz con coeficientes dados por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j. \\ 0 \text{ si } i > j, \end{cases}$$

con $i, j \in \{1,2,3\}$, entonces la tercera fila de la matriz $A^t \cdot B$ es igual a:

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

(E) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(F) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

MO 3. El determinante de la matriz $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -7 & 1 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 10 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es igual a:

(A) 240.

(B) 80.

(C) -300.

(D) 300.

(E) -240.

(F) -80.

MO 4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación reducida viene dada por

$$3x + 2y + z = 6.$$

Por otro lado, considere las rectas r_1 y r_2 en $\mathbb{R}^3$, donde r_1 está definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda, \\ y = 1 + 4\lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\lambda, \end{cases}$$

mientras que r_2 viene dada por la ecuación reducida

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-9}{3}.$$

Si P es el punto de intersección entre r_1 y π, entonces la distancia de P a r_2 es igual a:

(A) 4.

(B) $2\sqrt{7}$.

(C) 20.

(D) 5.

(E) $4\sqrt{5}$.

(F) $8\sqrt{2}$.

MO 5. Considere el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathcal{S} = \{(t,1,1), (1,0,1), (1,1,3t)\}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que existe un único valor de t para el cual $\mathcal{S}$ es linealmente dependiente. Entonces, para dicho t, el subespacio generado por $\mathcal{S}$ es:

(A) $\mathbb{R}^3$.

(B) La recta que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$.

(C) La recta que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(2,2,1)$.

(D) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(-2,-1,2)$.

(E) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(2,2,1)$.

(F) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(2,1,2)$.

MO 6. Dentro del espacio vectorial real $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes subespacios:

$$\mathcal{L} = \{A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;/\; a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\},$$
$$\mathcal{U} = \{B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;/\; b_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}.$$

Es decir, $\mathcal{L}$ es el subespacio formado por las matrices triangulares inferiores, y $\mathcal{U}$ el subespacio formado por las matrices triangulares superiores. Entonces:

(A) $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{U}$.

(B) $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) > 3$.

(C) $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3\times 3}\}$.

(D) $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{U}) < 3$.

(E) $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} \neq \{0_{3\times 3}\}$.

(F) $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L} + \mathcal{U}$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} = \{0_{3\times 3}\}$.

MO 7. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal y la recta r dada por la interesección de los planos

$$r=\begin{cases} x+y+z=1\\ z=0\end{cases}$$

Si $r\subseteq \text{Ker}(T)$ y $T(0,0,1)=(a,b)$, entonces:

(A) $\text{Ker}(T)=\mathbb{R}^3$ si y solamente si $(a,b)=(0,0)$.

(B) $\dim(\text{Ker}(T))=1$ si $(a,b)\neq(0,0)$.

(C) $\dim(\text{Ker}(T))\leq 2$ para todo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(D) $\dim(\text{Ker}(T))\leq 1$ para todo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(E) $\dim(\text{Ker}(T))=2$ si $(a,b)=(0,0)$.

(F) $\dim(\text{Im}(T))=2$ si $(a,b)\neq(0,0)$.

Nota importante: Para la siguiente pregunta, se da por hecho un resultado teórico que afirma que para cada transformación lineal $T\colon\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ existe una única matriz fila $\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1\times4}(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=ax+by+cz+dt,\ \text{para todo}\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}).$$

Es decir, toda transformación lineal de $\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$ está unívocamente representada por una matriz fila en $\mathcal{M}_{1\times4}(\mathbb{R})$.

MO 8. Considere el subconjunto de $\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\4\\3\end{pmatrix}\right\},$$

y sea $T\colon\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ una función que toma los siguientes valores en $\mathcal{S}$:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=4,\quad T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=8\quad\text{y}\quad T\left(\begin{pmatrix}2\\2\\4\\3\end{pmatrix}\right)=24.$$

Entonces:

(A) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}$ se tiene

$$a+b+c+d=4.$$

(B) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}$ se tiene

$$a+b+c+d=2.$$

(C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen con las condiciones anteriores.

(D) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}$ se tiene

$$a+b+c+d=8.$$

(E) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}$ se tiene

$$a+b+c+d=6.$$

(F) No existe ninguna transformación lineal T que cumpla con las condiciones anteriores.