N^o de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4
C	D	D	C
Ej. 5	**Ej. 6**	**Ej. 7**	**Ej. 8**
D	B	B	A

- El examen dura 3 horas y se aprueba con 55 puntos o más.
- Es sobre 100 puntos en total. Cada ejercicio vale 12.5 puntos, respuesta incorrecta: -3.125 puntos, sin respuesta: 0 punto.
- **Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.**
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.

Múltiple Opción

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005	0.001
z_α	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090
$z_{\alpha/2}$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.326	2.576	2.807	3.291

Ejercicio 1

Sea X una variable aleatoria tal que $E(X) = 10$ y $Var(X) = 18$. Usando la desigualdad de Chebyshev, la mayor cota inferior de $\mathbb{P}(5 < X < 15)$ es

(A) $0,32$ **(B)** $0,36$ **(C)** $0,28$ **(D)** $0,24$ **(E)** $0,53$

Solución: $\mathbb{P}(5 < X < 15) = \mathbb{P}(|X-10| < 5) = 1 - \mathbb{P}(|X-10| \geq 5)$

Por la desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|X-10| \geq 5) \leq \frac{18}{5^2} = 0,71999$$

Entonces

$$\mathbb{P}(5 < X < 15) \geq 1 - 0,71999 = 0,28001$$

Ejercicio 2

Los datos

$$0.42,\ 0.20,\ 0.92,\ 0.70,\ 0.57,\ 0.72,\ 0.60,\ 0.89,\ 0.06,\ 0.42$$

son una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} k(\alpha)\, x^{\alpha}(1-x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $k(\alpha)$ es una función de α.

La estimación de α por el método de los momentos es:

(A) $1,17$ **(B)** $0,62$ **(C)** $0,51$ **(D)** $1,44$ **(E)** $0,77$

Solución: Como la integral de la densidad debe ser 1, entonces

$$1 = \int_0^1 k(\alpha)x^{\alpha}(1-x)dx = k(\alpha)\int_0^1 x^{\alpha} - x^{\alpha+1}dx = k(\alpha)\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1 = k(\alpha)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

y $k(\alpha) = (\alpha+1)(\alpha+2)$.

Por otro lado la esperanza será

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 k(\alpha)xx^{\alpha}(1-x)dx = (\alpha+1)(\alpha+2)\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)dx = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} = \frac{\alpha+1}{\alpha+3} = 1 + \frac{-2}{\alpha+3}.$$

de donde $\hat{\alpha} = -3 + \frac{-2}{\bar{X}_n - 1} = \frac{1-3\bar{X}_n}{\bar{X}_n - 1} = 1,44$.

Ejercicio 3

En una ciudad las matrículas existentes de los vehículos están formadas por siete símbolos de los cuales los tres primeros son letras dentro del conjunto $\{A, B, X, Y, Z\}$ sin repetirse y los cuatro restantes son dígitos del 0 al 6 (por ejemplo una posible matrícula es AXY 1225). Se asumirá que existen tantos autos como chapas posibles. Se sortea un vehículo al azar. Entonces la probabilidad de que su matrícula esté formada por todos números distintos es igual a

(**A**) $0,410$ (**B**) $0,461$ (**C**) $0,395$ (**D**) $0,350$ (**E**) $0,504$

Solución:

Casos posibles: $A_3^5 \times 7^4$

Casos favorables: $A_3^5 A_4^7$

$p = CF/CP = 0,350$

Ejercicio 4

Calcular en forma aproximada la probabilidad de que al tirar una moneda balanceada mil veces la cantidad de caras que salieron en total esté entre 470 y 530.

(**A**) $0,97$ (**B**) $0,89$ (**C**) $0,94$ (**D**) $0,87$ (**E**) $0,84$

Solución: Si $X \sim Bin(1000, 1/2)$ queremos calcular $p = \mathbb{P}(X \in 470, 530])$.

Sean $B_1, \ldots, B_{1000} i.i.d. \sim Ber(1/2)$, entonces $\sum B_i \sim X$ y

$$p = \mathbb{P}\left(\sum B_i \in [470, 530]\right) = \mathbb{P}(\bar{B}_n \in [0.47, 0.53]) = \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{B}_n - 0.5)\sqrt{1000}}{(1/2)} \in [-1.9, 1.9]\right)$$
$$\approx \Phi(1,9) - \Phi(-1,9) = 0,94$$

Ejercicio 5

Tenemos una moneda cargada para la cual la probabilidad de que salga cara es p. Se lanza la moneda 78 veces y, en 20 ocasiones, obtenemos cara. Hallar un intervalo de confianza aproximado al 90 % para la probabilidad p de obtener cara al lanzar la moneda. El extremo izquierdo del intervalo es:

(**A**) $0,15$ (**B**) $0,16$ (**C**) $0,13$ (**D**) $0,18$ (**E**) $0,14$

Solución: Modelando el éxito (sale cara) como una variable Bernoulli, el promedio de veces que sale cara es $\bar{X}_{78} = 20/78 = 0,26$, de donde $s_n = \sqrt{0,26 \times (1 - 0,26)} = 0,44$. Como $\alpha = 10\,\%$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\sqrt{78} = 8,83$

$$I = 0,26 \pm 0,44 \times 1,645/8,83 = 0,26 \pm 0,08$$

Ejercicio 6

Se tienen dos urnas A y B:

- la urna A contiene 7 canicas verdes, 3 rojas y 8 negras
- la urna B contiene 5 canicas verdes y 8 negras

Se extrae una canica de la urna A y se la coloca en la urna B. Luego, se extrae una canica de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea verde dado que la segunda es negra?

(A) $0,339$ **(B)** $0,368$ **(C)** $0,371$ **(D)** $0,362$ **(E)** $0,346$

Por la fórmula de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(\text{segunda negra}) = \frac{7}{18}\frac{8}{14} + \frac{3}{18}\frac{8}{14} + \frac{8}{18}\frac{9}{14} = \frac{152}{18 \times 14}$$

Luego, por la fórmula de Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{primera verde}|\text{segunda negra}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{segunda negra}|\text{primera verde})\,\mathbb{P}(\text{primera verde})}{\mathbb{P}(\text{segunda negra})} \\ &= \frac{\frac{7}{18}\frac{8}{14}}{\frac{152}{18\times 14}} \\ &= 0,368\end{aligned}$$

Ejercicio 7

La computadora de una nave espacial recibe mensajes binarios donde cada bit es repetido 100 veces para disminuir los errores de trasmisión. Denotamos b^n al bit b repetido n veces, por ejemplo, $1^4 = 1111$, y si queremos transmitir el mensaje 101, deberemos enviar $1^{100}0^{100}1^{100}$. La computadora decidirá (hipótesis alternativa) que el bit original fue un 1 cuando k o más de los 100 bits que recibe son un 1. Hallar k para que la probabilidad de decidir que se trasmitió un 1 cuando en realidad se había trasmitido un 0 sea menor a $0,01$ suponiendo que la probabilidad de error, o sea de que un bit cambie de 0 a 1 o de 1 a 0 es de $0,1$.

(A) 5 **(B)** 17 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 21

Solución: Sean $X_1,\ldots,X_{100}$ los 100 bits.

Bajo la hipótesis nula de que se trasmitió un 0, las X_i tendrán distribución Bernoulli con parámetro $p = 0,1$. La región de crítica será de la forma $RC = \{\sum_i X_i \geq k\}$.

Buscamos k tal que

$$\begin{aligned}P_{H_0}((X_1,\ldots,X_{100}) \in RC) &= P_{H_0}(\sum_i X_i \geq k) \\ &= P_{H_0}((\frac{\sum_i X_i}{100} - 0,1)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0,1\times 0,9}} \geq (\frac{k}{100} - 0,1)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0,1\times 0,9}}) \\ &\leq 0,01\end{aligned}$$

Como $P_{H_0}((\frac{\sum_i X_i}{100} - 0,1)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0,1\times 0,9}} \geq (\frac{k}{100} - 0,1)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{0,1\times 0,9}}) \approx 1 - \Phi((\frac{k}{100} - 0,1)\frac{10}{0,3})$ podemos buscar k tal que $1 - \Phi(\frac{k}{3} - \frac{1}{0,3}) \leq 0,01$

Tenemos $1 - \Phi(\frac{k}{3} - \frac{1}{0,3}) \leq 0,01 \iff \Phi(\frac{k}{3} - \frac{1}{0,3}) \geq 1 - 0,01 \iff \frac{k}{3} - \frac{1}{0,3} \geq 2,325 \iff k \geq 10 + 3 \times 2,325 \iff k \geq 16,975$

Por lo tanto hay que tomar $k \geq 17$.

Ejercicio 8

Sean X e Y variables aletorias cuya función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} 0,7x + 1,3y & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces, la esperanza de X es:

(**A**) $0,558$ (**B**) $0,656$ (**C**) $0,567$ (**D**) $0,550$ (**E**) $0,575$

Solución: Tenemos $f_X(x) = \int_0^1 0,8x + 1,3ydy = 0,7x + \frac{1,3}{2}$ si $0 \leq x \leq 1$.

Entonces $E(X) = \int_0^1 x(0,7x + \frac{1,3}{2})dx = \frac{0,7}{3} + \frac{1,3}{4} = 0,558$