6. Verificación de programas funcionales

Especificación de programas

- $\forall i \in Input.\ \psi(i) \rightarrow \exists o \in Output.\ \varphi(i,o)$

donde Input y Output son **tipos de datos,** ψ es una **proposición** que expresa cierta condición que debe cumplir el valor de entrada y φ es la **proposición** que expresa la relación que debe cumplirse entre el valor de entrada y el valor de salida

En general:

- $\forall i_1 \in Input_1 \ldots \forall i_n \in Input_n.\ \psi(i_1 \ldots i_n) \rightarrow \exists o \in Output.\ \varphi(i_1,\ldots,i_n,o)$

Ejemplo:

Para todos $a,b \in$ **N** tq. $b \neq 0$ existen q y r tq. $a=b.q+r$ y $r < b$.

$(\forall a,b \in \mathbf{N})\ b \neq 0 \rightarrow \exists (q,r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}.\ a=b.q+r \wedge r < b$

Especificaciones en Coq

En Coq:

forall **(i_1:Input$_1$)... (i_n:Input$_n$), $\psi(i_1 \ldots i_n) \rightarrow$ {o:Output | $\varphi(i_1,\ldots,i_n,o)$ }**

Ejemplos:

– **forall (*a b:nat*), b$\neq$0 $\rightarrow$ {qr: N*N | match qr with**
(*q,r*) => *a=b.q+r* $\wedge$ *r < b*
end }

– ¿Especificación de la función que ordena una lista?

forall l:list, { l': list | (sorted l') $\wedge$ (perm l l') }

Extracción de programas

Si la prueba del existencial

$$\forall i \in \text{Input}.\ \psi(i) \rightarrow \{o \in \text{Output} \mid \varphi(i,o)\}$$

es ***constructiva***, el programa que calcula el resultado a partir de la entrada se encuentra necesariamente ***embebido*** en la prueba.

- *Qué diferencia el programa de la prueba?*
  - La ***prueba*** es el ***programa*** más la ***información lógica*** necesaria para demostrar la especificación
  - Para obtener el programa hay que ***extraer*** de la prueba la información computacional y ***olvidar*** la información lógica

Extracción de programas

Información computacional : objetos que viven en **Set**

Información lógica : objetos que viven en **Prop**

Mecanismo de extracción :

- Recorre el término de prueba recuperando los datos que viven en Set, olvidando los que viven en Prop y manteniendo la estructura.
- Originalmente se extrae hacia Fw, un lenguaje de programación no dependiente.
- Las dependencias en los objetos computacionales se olvidan.

[Paulin-Mohring 89]

Extracción de programas

Dada una prueba

$$p : \forall i \in \text{Input}.\ \psi(i) \rightarrow \{ o \in \text{Output} \mid \varphi(i,o) \}$$

el *contenido computacional* de p será una función

$$f_p : \text{Input} \rightarrow \text{Output}$$

Para ello deberá ocurrir que :

Input : Set

Output : Set

$\psi(i)$, $\varphi(i,o)$: Prop

Observar que los sorts de los tipos que intervienen en la especificación indican al procedimiento de extracción qué recorrer y qué olvidar durante la recorrida

Existenciales en Coq
con contenido computacional

Inductive sig (A:Set)(P:A→ **Prop**) : **Set**
:= exist : forall x:A, P x → sig A P.

{ x : A | P x }

Inductive sig2 (A:Set)(P Q:A→ **Prop**) : **Set**
:= exist2 : forall x:A, P x → Q x → sig2 A P Q.

{ x : A | (P x) & (Q x) }

Inductive sigS (A:Set)(P:A→ **Set**) : **Set**
:= existS : forall x:A, P x → sigS A P.

{ x : A & (P x) }

Inductive sigS2 (A:Set)(P Q:A→ **Set**) : **Set**
:= existS2: forall x:A, P x → Q x → sigS2 A P Q.

{ x : A & (P x) & (Q x) }

Existenciales en Coq
sin contenido computacional

Inductive ex (A:Set)(P:A$\rightarrow$ **Prop)** : **Prop**
:= ex_intro : forall x:A, P x $\rightarrow$ ex A P.

exist x : A, P x

Inductive ex2 (A:Set)(P Q:A$\rightarrow$ **Prop)** : **Prop**
:= ex2_intro : forall x:A, P x $\rightarrow$ Q x $\rightarrow$ ex2 A P.

exist2 x : A, (P x) & (Q x)

Sumas en Coq

Inductive sumbool (A B: **Prop**) : **Set**

:= left : A $\rightarrow$ (sumbool A B)

| right : B $\rightarrow$ (sumbool A B)

{A } + {B }

Inductive sumor (A:**Set**)(B: **Prop**) : **Set**

:= left : A $\rightarrow$ (sumor A B)

| right : B $\rightarrow$ (sumor A B)

A + {B}

Inductive or (A B: **Prop**) : **Prop**

:= or_introl : A $\rightarrow$ (or A B)

| or_intror : B $\rightarrow$ (or A B)

A $\vee$ B

Mecanismo de extracción en Coq

- **Extracción del programa**

  Extraction *id*

  Recursive Extraction id_1 ... Id_n

  Extraction *"file"* $_{...,}$

  Extraction *Library ...*

- **Extracción a un lenguaje de programación** (Ocaml, Haskell, Scheme, Toplevel):

  Extraction Language language

  Extract Constant $id_{coq} \Rightarrow id_{leng}$

  Extract Inductive $type_{coq} \Rightarrow type_{leng}$ **[** $c1_{ml}$... cn_{leng} **]**

  `Ver capítulo 18 del manual de Coq`

Mecanismo de extracción (síntesis)

- Metodología para obtener programas correctos:
  - **especificar en Coq el programa como un lema**
  - **extraer el programa de la prueba del lema**

- Desventaja de esta metodología:
  - la estructura del programa está oculta en el término de prueba hasta el final del proceso
  - dificultad de lectura del programa final
  - dificultad para optimizar el programa

Quisiéramos *verificar programas* más que sintetizarlos

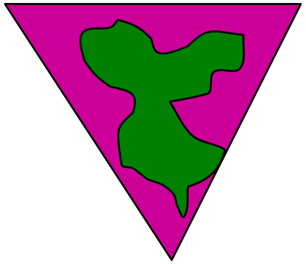
Verificación de programas

Es el proceso inverso al de extracción

P: Spec

$\downarrow f_P$

Programa



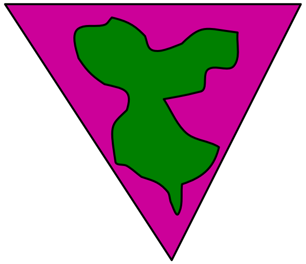
: Spec

Programa Spec

$\searrow \swarrow$

$\downarrow$

P:Spec



: Spec

Verificación de programas

- Dado el ***programa*** y la ***especificación*** hay que ***probar*** que el programa cumple con la especificación:
  - justificar la **terminación** del programa
  - probar los objetivos ligados con la **especificación** particular.
- La síntesis de esta información no es automática (a excepción de casos sencillos).
- Para simplificar el proceso de verificación los programas pueden tener anotaciones lógicas, que son directivas que guían la síntesis.

Ejemplo: División

Sean *a* y *b* ∈ **N**, b≠0.

Calculamos *a* **div** *b* y a **mod** *b* *simultáneamente* haciendo recursión en *a*:

- 0 **divmod** *b* = (0,0)
- (n+1) **divmod** *b* = let (q,r) = n **divmod** *b*

```
in    if r < b-1
      then (q,r+1)
      else (q+1,0)
```

División: especificación

- Especificación: Para todos $a,b \in \mathbf{N}$ tq. $b \neq 0$ existen q y r tq. $a=b.q+r$ y $r < b$.
- Prueba de que el programa es correcto: por inducción en a:

- **0 divmod** *b* = <0,0> ➡ $0 = b.0 + 0$ y $0 < b$
- (n+1) **divmod** *b* =

  let (q,r) := n **divmod** *b* ➡ **supongamos** $n=b.q+r$ y $r < b$.

  in **if** r < b-1 — **luego, si** $r < b - 1$

  then (q,r+1) — **entonces** $n+1 = b.q+(r+1)$ y $r+1<b$

  else (q+1,0) — **sino** $n+1 = b.(q+1)+0$ y $0<b$

Algunas Tácticas

- **refine *term*** : esta táctica permite proveer una prueba "casi" exacta de un goal (término con "holes", denotados _)
- **functional induction *id* *term*$_1$ ... *term*$_n$** : ésta es una táctica (aún experimental) que permite razonar por casos o por inducción siguiendo la definición de una función recursiva estructural

Pruebas de Terminación

- Si el programa no es recursivo el programa termina de forma trivial.
- Si el programa es recursivo hay que justificar:
  - que los llamados recursivos ***decrecen*** según cierto orden ***R***
  - que la relación ***R*** es ***bien fundada*** (o sea que no existen cadenas descendentes infinitas).
- En general, el programa debe tener como *anotación* la relación ***R*** con la cual hay que comparar los llamados recursivos

Accesibilidad

- Definición recursiva de funciones en **Set** sobre argumento principal de tipo **Prop**.
- El argumento principal es solamente usado para asegurar la terminación del algoritmo.
- Inducción bien fundada basada en definición inductiva de accesibilidad:

Inductive Acc (A:Set) (R: A → A → **Prop**) : A → **Prop :=**
Acc_intro : forall x:A, (forall y:A, R y x → Acc R y) → Acc R x

- Intuición: elementos accesibles de una relación son aquellos que no pertenecen a una R-cadena infinita decreciente

Accesibilidad y Relaciones bien fundadas

Acc_inv: forall (A : Set) (R : A → A → Prop) (x : A),
Acc R x → forall y : A, R y x → Acc R y

- La prueba Acc_inv A R x H y HRxy es estructuralmente menor que H, por lo tanto puede ser usada como un argumento en una invocación recursiva de una función cuyo argumento principal es H

Variable P: A → Set.

Variable F: forall x:a, (forall y:A, R x y → P y) → P x.

Fixpoint Fix_F (x:A) (H:Acc R x) : P x :=
F (fun (y:A)(HRxy: R y x) => Fix_F (Acc_inv H HRxy)).

Accesibilidad y Relaciones bien fundadas (2)

```
Definition well_founded : (A : Set) (R : A → A → Prop) : Prop :=
                forall a : A, Acc R a
```

- Si una relación es bien fundada, la misma puede ser usada para definir funciones recursivas: pueden ser definidas de tal forma que la relación es usada para controlar cuales son invocaciones (recursivas) correctas.

```
Definition well_founded_induction (A:Set) (R: A → A → Prop )
   (Hwf: well_founded R) (P: A → Set)
    (F: forall x:A, (forall y:A, R y x → P y) → P x)(x:A) : P x :=
     Fix_F F (Hwf x).
```

Pruebas de buena fundación

Ciertos órdenes pueden obtenerse a través de operadores de composición de relaciones que garantizan que si las relaciones iniciales son bien fundadas, el resultado de la composición también lo es [Paulson86].

Ejemplo típico de orden bien fundado: $< \subseteq N \times N$

Operadores de buena fundación

Subrelación :

Si **R** $\subseteq$ AxA es bien fundada y **R´** $\subseteq$ R

*entonces **R´** es bien fundada*

Imagen Inversa:

Sean

- **f** : A $\rightarrow$ B
- **R** $\subseteq$ BxB bien fundada

Definimos

- **R*** $\subseteq$ AxA como x **R***y **ssi** f (x) **R** f(y)

*entonces **R*** es bien fundada*

Operadores de buena fundación

Clausura transitiva

Si $\mathbf{R} \subseteq A x A$ es bien fundada, entonces $\mathbf{R^+} \subseteq A x A$ tal que

$x\,\mathbf{R^+}y$ **ssi** $(x\mathbf{R}y \lor \exists z \in A$ tq. $x\mathbf{R}z \land z\mathbf{R^+}y)$

es bien fundada

Suma disjunta

Si $\mathbf{R_A} \subseteq A x A$ es bien fundada y $\mathbf{R_B} \subseteq B x B$ es bien fundada entonces $\mathbf{R_{A+B}} \subseteq (A+B) \times (A+B)$ tal que $a\,\mathbf{R_{A+B}}\,b$ **ssi** $(a,b \in A$ y $a\mathbf{R_A}b \lor a,b \in B$ y $a\mathbf{R_B}b)$

es bien fundada

Operadores de buena fundación

Producto Lexicográfico

Si $\mathbf{R_A} \subseteq AxA$ es bien fundada y $\mathbf{R_B} \subseteq BxB$ es bien fundada entonces $\mathbf{R_{ALexB}} \subseteq (AxB) \times (AxB)$ tal que $(a,b)\ \mathbf{R_{ALexB}}\ (a',b')$ **ssi** $(\ a\mathbf{R_A}a' \vee \ a=a' \wedge b\mathbf{R_B}b'\ )$

es bien fundada

Nota:

el producto lexicográfico se generaliza para el caso en el

que B es una familia de tipos indexada por A (o sea $B: A \to Set$).

En ese caso el orden $\mathbf{R_{ALexB}} \subseteq \Sigma_{x:A}\ \mathbf{B(x)} \times \Sigma_{x:A}\ \mathbf{B(x)}$

Este producto general es el que está definido en Coq.

Operadores de buena fundación en Coq

- En las bibliotecas se encuentran:
  - Ordenes de base bien fundados
    - por ejemplo lt en nat está en **theories\ARITH\Wf_nat**
  - Operadores para construir órdenes bien fundados
    - **theories\WELLFOUNDED** (con la prueba respectiva de que construyen órdenes bien fundados)