Matemática Inicial

Solución Examen 18 de diciembre de 2023.

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Curso

Ejercicios Múltiple Opción

Ej.1	Ej.2	Ej.3	Ej.4	Ej.5	Ej.6
C	D	C	A	B	A

Ej.7.1	Ej.7.2	Ej.7.3	Ej.7.4	Ej.7.5	Ej.7.6	Ej.7.7	Ej.7.8	Ej.7.9	Ej.7.10
F	F	V	V	F	F	V	V	V	F

Ejercicio 1 (5 puntos) *Si $x \neq 0$, la fracción* $\dfrac{x^{1/3}x^{-2/3}}{x^{2/3}}$ *es igual a:*

*(**A**)* $x^{1/3}$ *(**B**)* $x^{-1/3}$ *(**C**)* x^{-1} *(**D**)* x

Solución:

$$\frac{x^{1/3}x^{-2/3}}{x^{2/3}} = \frac{x^{1/3-2/3}}{x^{2/3}} = \frac{x^{-1/3}}{x^{2/3}} = x^{-1/3-2/3} = x^{-1}.$$

*Por lo tanto, la respuesta es **C**.*

Ejercicio 2 (5 puntos) *Se consideran las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x - 1$. Se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(g(x))$, entonces $h(2)$ vale:*

*(**A**) 8* *(**B**) 1* *(**C**) 7* *(**D**) 2*

Solución:

Tenemos que $h(2) = f(g(2))$ y por definición $g(2) = 1$ de donde $h(2) = f(1) = 2$.

También podemos observar que en general $h(x) = f(g(x)) = 2(x-1)^2$, de donde evaluando en 2, obtenemos

$$h(2) = 2(2-1)^2 = 2.$$

*Por lo tanto la respuesta es **D**.*

Ejercicio 3 (5 puntos) *Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $f : D \to [-1, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Entonces f cumple que:*

*(**A**) f es inyectiva si $D = [-2, 2]$*

*(**B**) f es sobreyectiva si $D = [1, +\infty)$*

*(**C**) f es biyectiva si $D = (-\infty, 0]$*

*(**D**) f es biyectiva si $D = \mathbb{R}$*

Solución:

Observar que $f(-x) = f(x)$, por lo tanto no puede ser inyectiva en ningún intervalo centrado en 0, es decir, opción A y D no se cumplen.. Además $f^{-1}(-1) = 0$ por lo tanto si $D = [1, +\infty]$, f no puede ser sobreyectiva.

*En conclusión, la respuesta es **C**.*

Ejercicio 4 (5 puntos) *Sea la función $f : \mathbb{R} \setminus \{-1/2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x+1}$. Entonces $f'(0)$ vale:*

*(**A**) -1* *(**B**) 3* *(**C**) 0* *(**D**) 1/2*

Solución:

Aplicando la formula para la derivada del cociente obtenemos

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(2x+1) - (x^2+x+1)2}{(2x+1)^2},$$

por lo tanto, evaluando en $x = 0$ obtenemos

$$f'(0) = \frac{1-2}{1} = -1.$$

*La respuesta es **A**.*

Ejercicio 5 (5 puntos) *El valor del límite $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \sqrt{9x^2+6x}$ es:*

*(**A**) 0* *(**B**) -1* *(**C**) $+\infty$* *(**D**) no existe*

Solución:

Si multiplicamos y dividimos por $3x + \sqrt{9x^2+6x}$ obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - \sqrt{9x^2+6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2 - (9x^2+6x)}{3x + \sqrt{9x^2+6x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x}{3x+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x}{6x} = -1.$$

*La respuesta es **B**.*

Ejercicio 6 (5 puntos) *El valor del límite* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{2x+\ln(2x)}$ *es:*

*(**A**)* $+\infty$ *(**B**) 1* *(**C**) 0* *(**D**)* $\frac{1}{2}$

Solución:
Aplicando órdenes de infinitos tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{2x+\ln(2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

*La respuesta es **A**.*

Ejercicio 7 (15 puntos) *Sea* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ *una función cuyo gráfico se muestra a continuación:*

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

1. $f(1) < 0$

   Solución: *Falso, ya que* $f(1) = 3$.

2. *El conjunto* $f^{-1}(\{3\})$ *tiene exactamente 3 elementos.*

   Solución: *Falso, ya que* $0, 1, 2$ *y* 4 *son preimagenes de* 3.

3. *La ecuación* $f(x) = 0$ *tiene dos soluciones.*

   Solución: *Verdadero.*

4. *La imagen de* f, $Im(f) \subset [-5, 5]$.

   Solución: *Verdadero, ya que la imagen está contenida en* $[-4, 4]$.

5. f *es biyectiva.*

   Solución: *Falso, ya que no es inyectiva.*

6. *Sea g definida como $g(x) = 2f(x) + 1$, entonces $g(0) = 1$.*

   Solución: *Falso, ya que $f(0) = 3$ y por tanto $g(0) = 7$.*

7. *La restricción de f al intervalo $[2,3]$, $f : [2,3] \to \mathbb{R}$, es inyectiva.*

   Solución: *Verdadero, ya que es monótona decreciente en ese intervalo.*

8. *f está en las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[1,3]$.*

   Solución: *Verdadero, ya que f es continua y además $f(1) \cdot f(3) < 0$ (tienen distinto signo)*

9. *$f'(2) < 0$.*

   Solución: *Verdadero, ya que f es decreciente en un entorno de $x = 2$ (la recta tangente tendría pendiente negativa).*

10. *La función f es creciente en el intervalo $[3,4]$.*

    Solución: *Falso.*

Ejercicios Desarrollo

Ejercicio 8 (30 puntos)

1. *Bosquejar el gráfico de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.*

2. *Resolver las siguiente inecuaciones en los reales:*

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+x+2} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^5 \qquad (1)$$

$$\ln(x-2) - \ln(2x) + \ln(x-3) \leq 0 \qquad (2)$$

3. a) *Hallar el conjunto de valores que verifican ambas inecuaciones.*

   b) *Hallar el conjunto de valores que verifican la inecuación (2) pero no la (1)*

Solución:

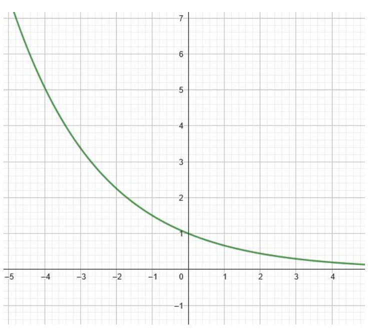

gráfico de f

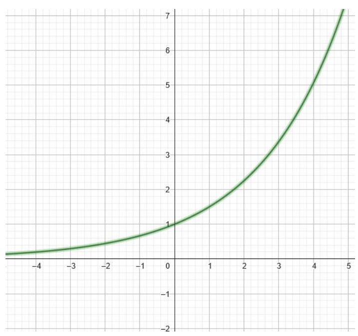

gráfico de g

1. *Observar que f es decreciente (base menor que 1) y g es creciente (base mayor que 1).*

2. *El dominio de definición de la inecuación es $D = \mathbb{R}$. Observando que $9/4 = (2/3)^{-2}$, por lo tanto la primer inecuación es equivalente a*

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+x+2} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-10}.$$

Ahora, como la función f definida en la parte anterior es decreciente, tenemos que la inecuación se verifica si y solo si $-x^2+x+2 \leq -10$, es decir si $-x^2+x+12 \leq 0$.
Factorizando, tenemos que $-x^2+x+12 = -(x+3)(x-4)$, por lo que es menor o igual a cero si y solo si $x \in (-\infty,-3] \cup [4,+\infty) = S_1$.

Resolvamos ahora la segunda inecuación. Primero que nada, por existencia del logaritmo, para que la expresión tenga sentido debe cumplirse que $x > 3$. El dominio de existencia de la inecuación es $D = (3,+\infty)$.

Luego, usando las propiedades de la suma y resta de logaritmos, obtenemos

$$\ln(x-2) - \ln(2x) + \ln(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(x-2)(x-3)}{2x}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{(x-2)(x-3)}{2x} \leq 1.$$

Estudiando el signo de denominador y numerador resulta que $0 < \frac{(x-2)(x-3)}{2x}$ se verifica si $x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$.
Por otro lado $\frac{(x-2)(x-3)}{2x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2-7x+6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) \leq 0$, es decir $x \in [1,6]$.
Por lo tanto, $0 < \frac{(x-2)(x-3)}{2x} \leq 1$ si y solo si $x \in [1,2) \cup (3,6]$.
Finalmente, usando el dominio de existencia de la inecuación resulta que el conjunto solución es $S_2 = (3,6]$.

3. a) *El conjunto de puntos que verifican ambas inecuaciones es $S_1 \cap S_2 = [4,6]$.*
   b) *El conjunto de puntos que verifican la segunda inecuación pero no la primera es $S_2 \setminus S_1 = (3,4)$.*

Ejercicio 9 (25 puntos) *Sea $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & si \quad x \leq 1, \\ -x+2 & si \quad x > 1. \end{cases}$$

1. *Graficar f.*
2. *Analizar si f es continua en $x = 1$. Justificar.*
3. *Se considera la siguiente afirmación:*

$$\exists\, x \geq 0 \text{ tal que } f(x) > 1$$

   a) *Indicar si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.*
   b) *Enunciar la negación de la afirmación.*

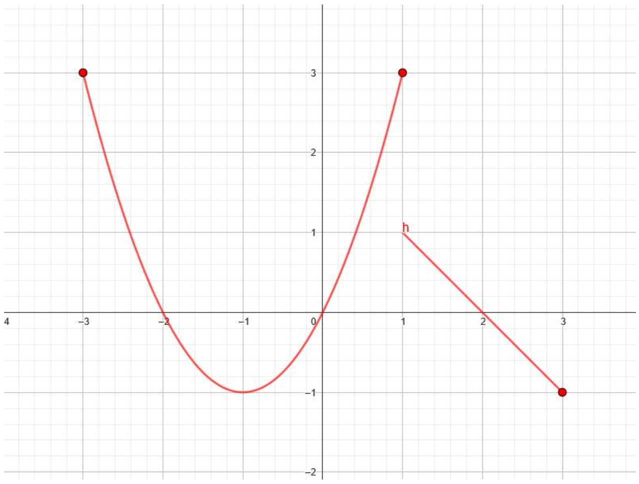

gráfico de f

Solución:

1. *Ver gráfica.*
2. *Observar que* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -x+2 = 1$, *mientras que* $f(1)=3$, *por lo tanto,* f *no es continua en* $x=1$.
3. a) *La afirmación es correcta, ya que* $1>0$ *y* $f(1)=3>1$.

   b) *La negación de la afirmación sería:*

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq 1.$$