

# Señales Aleatorias y Modulación

## Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

20 de noviembre de 2023

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

Se desea comparar el desempeño de dos sistemas de comunicación analógica. El mensaje a transmitir  $m(t)$  tiene ancho de banda  $W$  y potencia  $P_x = 1$ . En ambos sistemas la potencia de transmisión máxima permitida es  $P_T = 10kW$ . Se asume que el canal es un medio duro, donde la atenuación entre el transmisor y el receptor es  $L = 80dB$ . Este último agrega ruido AWGN, predominante frente al ruido introducido en el canal, con densidad espectral de potencia  $S_n(f) = \frac{\eta}{2}$ , siendo  $\eta = 10^{-9} \frac{W}{Hz}$ .

El primer sistema usa modulación AM y el receptor se basa en detección de envolvente. El índice de modulación es  $k_a = 0.95$  y el ancho de banda disponible es el de AM comercial  $B_T = 10kHz$ . El segundo sistema utiliza modulación DSB con el mismo ancho de banda de transmisión y cuenta con un repetidor ideal ubicado en el punto óptimo. Se asume que el repetidor tiene las mismas características que el receptor y que ambas ganancias compensan la atenuación del tramo previo del canal.

- (a) Dar el diagrama de bloques del receptor para el primer sistema de comunicación.
- (b) Dar el diagrama de bloques del receptor para el segundo sistema de comunicación.
- (c) Hallar el máximo ancho de banda del mensaje que soporta el primer sistema.
- (d) Hallar la máxima relación señal a ruido en detección para el primer sistema.
- (e) Hallar la máxima relación señal a ruido en detección para el segundo sistema.
- (f) ¿Cuál de los dos sistemas elegiría? Justifique su respuesta.

## Problema 2

Comunicarse con los astronautas del Apolo 11 a cientos de miles de kilómetros no era tarea sencilla. ¿Cómo funcionaban los radios usados en los viajes a la Luna? En este ejercicio se propone analizar algunos aspectos básicos del sistema FM usado en los 60s. El corazón de este complejo sistema era el procesador de premodulación, un componente clave que combinaba voz, datos científicos, señales de TV y telemetría para la transmisión a la Tierra. Fue construido solamente con componentes discretos (i.e. sin circuitos integrados) que fueron soldados y empaquetados herméticamente en una caja de 6.6 kg.

El Apolo 11 usaba para detectar la señal FM un discriminador basado en promedio de pulsos, convirtiendo primero los cambios de fase de la señal modulada en FM en pulsos de ancho fijo.

- (a) Explicar conceptualmente y en pocas palabras, cómo promediando esta señal de pulsos de ancho fijo es posible obtener a la salida del detector la señal demodulada buscada. Bosquejar un ejemplo de una señal modulada en FM y la salida correspondiente.

La voz se transmitía modulada en FM a la nave espacial, en una subportadora de 30kHz. Considerando una señal de audio de ancho de banda  $W = 4$  kHz y potencia  $S_x = 0.5$ , y una desviación máxima en frecuencia  $f_\Delta = 7.5$  kHz.

- (b) Usando la regla de Carson, ¿cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM?

En caso de un mal funcionamiento, la comunicación de voz de respaldo podría transmitirse a la nave espacial a través de la subportadora de 70kHz (usada normalmente para datos).

- (c) ¿Cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM en este caso?

Las comunicaciones entre el Apolo 11 y Tierra era en la denominada Unified S-Band (USB<sup>1</sup>), en frecuencias cercanas a los 2.2GHz. Las señales de voz, datos, TV, se combinaban usando modulación en fase (PM), debido a que mantiene la frecuencia bastante constante, lo que permitía medir la velocidad de la nave. A continuación haremos un cálculo simplificado del enlace entre la Tierra y la Luna (384400 km), asumiendo una modulación FM con los parámetros indicados previamente ( $f_\Delta = 7.5$  kHz y mensaje de audio de ancho de banda  $W = 4$  kHz y potencia  $S_x = 0.5$ ). Como modelo de canal se utiliza la atenuación en espacio libre de Friis<sup>2</sup> y un ruido AWGN con DEP  $\eta/2$ , siendo  $\eta = 10^{-15}$  W/Hz. El requerimiento definido por la NASA era que como máximo el 10% de las palabras tuvieran distorsión. Para lograr esto fue necesario instalar antenas gigantes de 85 pies ubicadas en distintas partes del mundo. Por lo tanto, una parte de la atenuación por la distancia era compensada por dichas antenas, lo cual estimaremos en 50dB de ganancia. Si el requerimiento de la NASA se traduce en una mínima  $SNR_D = 5dB$ :

- (d) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión  $S_T$  necesaria para cumplir dicho requerimiento?
- (e) ¿Cómo cambia el resultado para el caso en que la nave está en el espacio a 200km de la Tierra?

## Pregunta 1

Considerar la transmisión de una señal  $s(t)$  con potencia  $P$  a través de un cable coaxial, que se modela como medio duro con parámetros  $L$  y  $\eta$ . Suponer que se utiliza un repetidor analógico *real* idéntico al receptor, donde ambos tienen una ganancia tal que recuperan la atenuación del tramo inmediato previo de canal. El ruido AWGN que introduce tanto el repetidor como el receptor tiene densidad espectral de potencia  $\eta_A/2$ , siendo  $\eta_A \gg \eta$ .

1. Realizar el diagrama del modelo del sistema detallando todas las señales y bloques.
2. Calcular la relación señal a ruido en recepción  $SNR_R$  en función de la ubicación del repetidor ( $x$ , normalizada entre 0 y 1).
3. Deducir la ubicación óptima del repetidor e indicar la  $SNR_R$  resultante.

---

<sup>1</sup>No confundir con el más popular actualmente *Universal Serial Bus*.

<sup>2</sup>Atenuación en espacio libre de Friis:  $L(d) = (4\pi f_c d/c)^2$  siendo  $c = 3 \times 10^8$  m/s

# Solución

## Problema 1

- (a) Ver teórico.
- (b) Ver teórico.
- (c) Las condiciones que debe cumplir el ancho de banda del mensaje  $W$  son dos:
1. Ancho de banda permitido:  $W \leq \frac{1}{2}B_T^{\text{máx}} \Rightarrow W \leq 5\text{kHz}$
  2. Umbral en la  $SNR_R$ :

$$SNR_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow W \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20L\eta} = 5\text{kHz}$$

Ambas condiciones imponen la misma restricción, por lo que resulta  $W_{\text{máx}} = 5\text{kHz}$ .

- (d) Con el ancho de banda obtenido en la parte anterior garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale:

$$SNR_D^{\text{máx}} = \frac{k_a^2 P_x}{1 + k_a^2 P_x} \frac{P_T^{\text{máx}}}{L\eta W_{\text{máx}}} = 9.8\text{dB}$$

- (e) La  $SNR_D$  para DSB está dada por la expresión  $P_D/N_D$  donde:

- La potencia de la señal detectada queda:

$$P_D = \frac{P_T G_{rep} G_{rx}}{L^{1/2} L^{1/2}} = P_T$$

- La potencia de la componente de ruido queda:

$$N_D = \eta B_T G_{rx} = \eta B_T L^{1/2}$$

Combinando las expresiones anteriores obtenemos:

$$SNR_D^{\text{máx}} = \frac{P_T^{\text{máx}}}{\eta B_T L^{1/2}} = 50\text{dB}$$

- (f) En base a la  $SNR_D$  obtenida para cada caso, es claro que el desempeño del segundo sistema es mucho mejor. En términos de potencia transmitida, en ambos casos estamos usando la misma, por lo que el gasto de energía será equivalente en ese punto. Sin embargo, el primer sistema al usar AM utiliza una parte importante de la potencia transmitida para enviar la portadora. Esto resulta en un receptor más sencillo y, por lo tanto, de menor costo. Además, el segundo sistema utiliza un repetidor, con lo cual también tendremos gastos adicionales en la instalación y mantenimiento de ese punto.

## Problema 2

- (a) La señal de pulsos de ancho fijo corresponde a un tren de pulsos, donde habrá mayor concentración de pulsos para los tramos donde la señal modulada en FM tiene más cruces por cero y viceversa. Esto es equivalente a decir que habrá más pulsos cuando la frecuencia instantánea sea mayor y viceversa. Por lo tanto, al promediar la señal de pulsos, obtendremos una salida suave, cuyo mayor valor indicará mayor frecuencia instantánea de la señal FM y viceversa. Por lo tanto, la salida será proporcional a la frecuencia instantánea de la señal modulada en FM, por lo que será también proporcional al mensaje original que había sido modulado en FM.

- (b)  $B_T = 2(f_\Delta + W) = 31\text{kHz}$ .

(c) El ancho de banda de la señal FM se mantiene, ya que no depende de la portadora  $f_c$ :  $B_T = 2(f_\Delta + W) = 31\text{kHz}$ .

(d)  $L_{\text{Friis}}(d = 384400\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 211\text{dB}$   
 $L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 161\text{dB}$

Por un lado se debe cumplir la  $SNR_D$  mínima:

$$SNR_D = 3D^2 S_x \gamma, \text{ siendo } \gamma = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} W$$

$$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} W SNR_D / 3D^2 S_x$$

Por otro lado se debe verificar la condición de umbral:

$$SNR_R = S_R / N_R = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$$

$$\rightarrow S_T = 10 \eta L_{\text{efectivo}} B_T$$

De la condición más restrictiva se obtiene el valor de  $S_T$  mínimo necesario.

(e) Repetimos el proceso de la parte anterior pero con los nuevos valores:

$$L_{\text{Friis}}(d = 200\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 145\text{dB}$$

$$L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 95\text{dB}$$

$$SNR_D = 3D^2 S_x \gamma, \text{ siendo } \gamma = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} W$$

$$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} W SNR_D / 3D^2 S_x$$

$$SNR_R = S_R / N_R = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$$

$$\rightarrow S_T = 10 \eta L_{\text{efectivo}} B_T$$

De la condición más restrictiva se obtiene el valor de  $S_T$  mínimo necesario.