Matemática Inicial

Segundo Parcial, Noviembre de 2023.

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo (Mat-Noct)

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (10 puntos) *Se consideran las siguientes funciones:*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = -x^2 + 1$.
- $g : (\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \ln(2x-1)$.

1. *Hallar la función compuesta $h = f \circ g$, indicando dominio y codominio.*
2. *¿La función compuesta $g \circ f$ está bien definida? Justificar.*
3. *Hallar la recta tangente al gráfico de la función h en el punto* $(1, h(1))$.

Solución:

1. El dominio de la función f es $\mathbb{R}$ por lo tanto la imagen de g está incluida en dicho dominio y la función compuesta h está bien definida.

   Además $h : (\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $h(x) = -(\ln(2x-1))^2 + 1$

2. La función compuesta $g \circ f$ está bien definida si la imagen de f está incluida en el dominio de g. Es fácil ver que existen valores de $x \in D(f)$ para los cuales $f(x) \notin D(g) = (\frac{1}{2}, +\infty)$. Por ejemplo para $x = 1$ se tiene que $f(x) = 0 \notin D(g)$, por lo tanto la función compuesta $g \circ f$ no está bien definida.

3. La recta tangente al gráfico de h en el punto $(1, h(1)) = (1, 1)$ está definida por

$$y - 1 = h'(1)(x-1),$$

   donde usando la regla de la cadena tenemos que:

$$h'(x) = -2\ln(2x-1)(\ln(2x-1))' = -2\ln(2x-1)\frac{1}{2x-1} \times 2 = -\frac{4\ln(2x-1)}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad h'(1) = 0$$

   La recta tangente queda entonces $y - 1 = 0$, es decir $y = 1$.

Ejercicio 2 (10 puntos) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1, \\ b & \text{si } x = 1, \\ \frac{2}{3}ax + \sin(\frac{1}{x-1})\ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. *Hallar valores de a y b para que f sea continua en $x = 1$.*
2. a) *¿Es f continua en el resto de los puntos del dominio? Justificar.*
   b) *Definir $f(-1)$ de manera que f resulte continua en $x = -1$.*
3. *Para los a y b hallados en la parte (1),* **investigar** *si el intervalo $I = [0,2]$ está en las hipótesis del teorema de Bolzano. ¿Qué se puede concluir?*

Solución:

1. La función f es continua en $x = 1$ si:
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$
Tenemos que:
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{3}ax + \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{3}ax + \lim_{x\to 1^+} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln(x) = \frac{2a}{3}$$
ya que $\lim_{x\to 1^+} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln(x) = 0$ por ser límite de una función acotada $\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ por una función que tiende a cero $\lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0$.
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} 2(x-2) = -2$$
Finalmente $f(1) = b$.
Por lo tanto para que f sea continua en $x = 1$ tiene que cumplirse que:
$$\frac{2a}{3} = -2 = b$$
Es decir $b = -2$ y $a = -3$.
2. *a*) El dominio de f es $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ Para los valores $x < 1$ la función f es cociente de polinomios sin problemas de ceros en el denominador y suma, es decir cociente de funciones continuas y por lo tanto continua. Para $x > 1$ la función es suma y producto de funciones continuas y por lo tanto es continua.
   b) La función f no está definida en $x = -1$ para poder definirla de manera que sea continua debe verificarse:
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$$
   Tenemos que:
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} \lim_{x\to -1^+} \frac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} 2(x-2) = -6$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} 2(x-2) = -6$$
   Por lo tanto si definimos $f(-1) = -6$ tenemos que f es continua también en $x = -1$ y es posible definir f en todos los reales de manera continua.
   c) El intervalo $[0,2]$ no está en las hipótesis de Bolzano ya que $f(0) < 0$ y $f(2) < 0$. Por lo tanto no es posible concluir sobre la existencia de raíces en dicho intervalo.

Ejercicio 3 (20 puntos) *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x+3}{2x-4}$.*

1. *Hallar el dominio de definición D de f.*
2. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

   d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

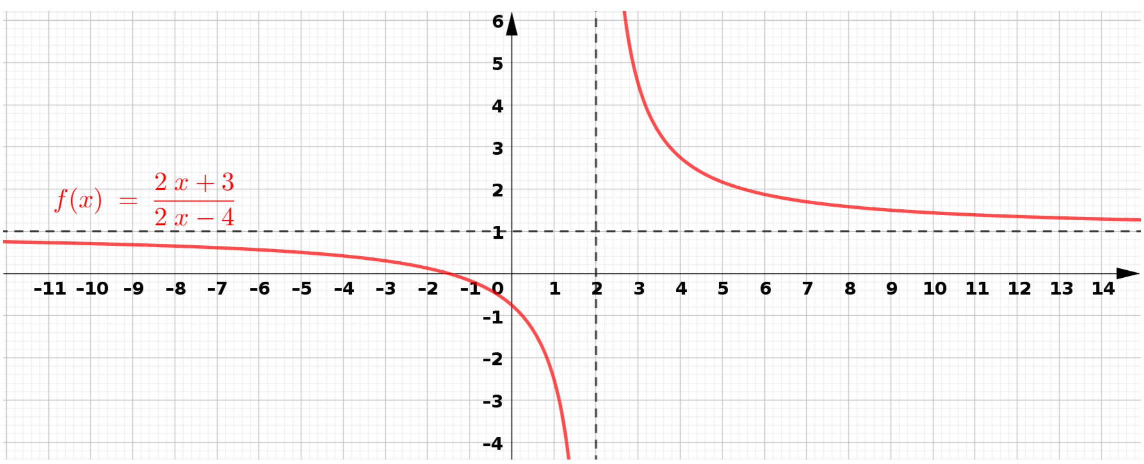
3. *Bosquejar el gráfico de f.*
4. *Probar que $f : D \to Im(f)$ es biyectiva y hallar f^{-1} la función inversa de f.*
5. *Calcular $f'(x)$.*
6. *¿Es f creciente o decreciente? Justificar.*

1. Por ser un cociente, el dominio de la función son $x \in \mathbb{R}$ tales que $2x - 4 \neq 0$ es decir $x \neq 2$. Es decir $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. *a)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{2x-4} = \frac{2}{2} = 1$ (cociente de polinomios de igual grado)

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{2x-4} = \frac{2}{2} = 1$ (cociente de polinomios de igual grado)

   c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x+3}{2x-4} = +\infty$ (constante positiva dividido algo que tiende a cero por derecha)

   d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x+3}{2x-4} = -\infty$ ((constante positiva dividido algo que tiende a cero por izquierda)
3. Usando los límites hallados anteriormente tenemos que un bosquejo del gráfico de f es el de la figura.



4. Para probar que f es biyectiva tenemos que probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Al estar definida sobre su imagen, es sobreyectiva por definición. Falta probar que es inyectiva, esto es $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+3}{2x_1-4} = \frac{2x_2+3}{2x_2-4} \Leftrightarrow (2x_1+3)(2x_2-4) = (2x_2+3)(2x_1-4) \Leftrightarrow$$
$$4x_1x_2 - 8x_1 + 6x_2 - 12 = 4x_1x_2 - 8x_2 + 6x_1 - 12 \Leftrightarrow 14x_1 = 14x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Probamos que f es biyectiva y por lo tanto invertible. Vamos a hallar la inversa: $f^{-1} : Im(f) \to D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x-4} = y \Leftrightarrow 2x+3 = y(2x-4) = 2xy - 4y$$
$$\Leftrightarrow 2x - 2xy = -4y - 3 \Leftrightarrow 2x(1-y) = -4y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{-4y-3}{2(1-y)} = \frac{4y+3}{2(y-1)}.$$

Tenemos entonces que $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2(x-1)}$. De esta expresión se deduce que el dominio de f^{-1} es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ que observando el bosquejo del gráfico de f vemos que coincide con la imagen de f (el valor $x = 1$ es el único valor que no tiene pre-imagen). En resumen, tenemos que:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ definida por } f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2(x-1)}.$$

5. Usamos la propiedad de derivada del cociente para calcular:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)'(2x-4) - (2x+3)(2x-4)'}{(2x-4)^2} = \frac{2(2x-4) - (2x+3)2}{(2x-4)^2} = \frac{-14}{(2x-4)^2}$$

6. De la parte anterior tenemos que $f'(x) < 0$ para todo valor de $x \in D$ y por lo tanto la función f es decreciente en todo el dominio. Esto se puede observar también del gráfico.