

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo (Mat-Noct)

**Importante:** en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

**Ejercicio 1 (10 puntos)** Se consideran las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -x^2 + 1$ .
- $g : (\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \ln(2x - 1)$ .

1. Hallar la función compuesta  $h = f \circ g$ , indicando dominio y codominio.
2. ¿La función compuesta  $g \circ f$  está bien definida? Justificar.
3. Hallar la recta tangente al gráfico de la función  $h$  en el punto  $(1, h(1))$ .

**Ejercicio 2 (10 puntos)** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y la función  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1, \\ b & \text{si } x = 1, \\ \frac{2}{3}ax + \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Hallar valores de  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua en  $x = 1$ .
2. a) ¿Es  $f$  continua en el resto de los puntos del dominio? Justificar.  
b) Definir  $f(-1)$  de manera que  $f$  resulte continua en  $x = -1$ .
3. Para los  $a$  y  $b$  hallados en la parte (1), probar que el intervalo  $I = [0, 2]$  está en las hipótesis del teorema de Bolzano. ¿Qué se puede concluir?

**Ejercicio 3 (20 puntos)** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{2x+3}{2x-4}$ .

1. Hallar el dominio de definición  $D$  de  $f$ .
2. Calcular los siguientes límites:
 

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
3. Bosquejar el gráfico de  $f$ .
4. Probar que  $f : D \rightarrow \text{Im}(f)$  es biyectiva y hallar  $f^{-1}$  la función inversa de  $f$ .
5. Calcular  $f'(x)$ .
6. ¿Es  $f$  creciente o decreciente? Justificar.