Ejercicio 1 (10 puntos) *Calcular los siguientes límites:*

(a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-13x+10}{x^2+5x-6}$$

(b)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}$$

Solución

(a) Este límite es indeterminado del tipo 0/0, por lo tanto ambos polinomios tienen raíz uno. Para factorizar podemos aplicar Ruffini.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-13x+10}{x^2+5x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x-10)}{(x-1)(x+6)} = -\frac{6}{7}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{3x^2+4}-4)\sqrt{(3x^2+4}+4)}{(x-2)(\sqrt{3x^2+4}+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+4-16}{(x-2)(\sqrt{3x^2+4}+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{3x^2+4}+4)} = \frac{3}{2}$$

Para factorizar $3x^2+4-16$, hicimos $3x^2+4-16 = 3x^2-12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$

Ejercicio 2 (17 puntos) *Sea* $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3\sqrt{17-x}$.

(a) Probar que f *es inyectiva,*

(b) Hallar el conjunto imagen de f*,*

(c) Modificar el codominio para que la función sea biyectiva y para dicho codominio hallar f^{-1}.

Solución

(a) Sea $x_1 \neq x_2$, planteamos $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{17-x_1} &= 3\sqrt{17-x_2} \Leftrightarrow \\ 17-x_1 &= 17-x_2 \Leftrightarrow \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Absurdo, porque partimos de que $x_1 \neq x_2$.

(b) f es una función continua y decreciente, por lo tanto alcanza con que veamos que pasa en los extremos del dominio para definir el conjunto imagen.

$f(1) = 12$ y cuando $x \to -\infty$, tenemos que $17-x$ tiende a ∞. Por lo tanto la imagen es: $[12, +\infty)$.

(c) Sea $f : (-\infty, 1] \to [12, +\infty)$

Para hallar f^{-1} escribimos $y = 3\sqrt{17-x}$ y despejamos x, obteniendo: $x = 17 - \frac{y^2}{9}$.

Por lo tanto $f^{-1}(x) = 17 - \frac{x^2}{9}$

Ejercicio 3 (18 puntos) *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & si\ x > 3 \\ a(x+1) & si\ x \leq 3 \end{cases}$$

(a) Hallar a para que h sea una función continua en $\mathbb{R}$.

(b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = e^{x+1}$. Usando el valor de a hallado en la parte anterior, hallar $h \circ g$.

(c) Hallar $(g \circ h)'(-5)$ y $(g \circ h)'(1)$.

(a) Para que h sea continua $\lim_{x \to 3^+} h(x) = h(3)$, entonces

$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 = 4a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

(b)

$$(h \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{\left(e^{x+1}\right)^2 - 9}{e^{x+1}-3} & \text{si } e^{x+1} > 3 \\ \frac{3}{2}\left(e^{x+1}+1\right) & \text{si } e^{x+1} \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{2x+2}-9}{e^{x+1}-3} & \text{si } x > \ln(3) - 1 \\ \frac{3}{2}\left(e^{x+1}+1\right) & \text{si } x \leq \ln(3) - 1 \end{cases}$$

(c) Por regla de la cadena, $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$, por lo tanto para calcular $(g \circ h)'(-5)$, precisamos:

- $g'(x) = (e^{(x+1)})' = e^{(x+1)}$
- $h'(-5)$, por lo tanto $h'(x) = \left(\frac{3}{2}(x+1)\right)' = \frac{3}{2}$
- $h(-5) = \frac{3}{2}(-5+1) = -6$

Por lo tanto $(g \circ h)'(-5) = e^{(-6+1)} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}e^{-5}$.

- $h'(1)$, por lo tanto $h'(1) = \frac{3}{2}$
- $h(1) = 3$.

Por lo tanto $(g \circ h)'(1) = e^{(3+1)} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}e^4$.

Ejercicio 4 (10 puntos) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\cos(x)$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $P = (0, 1)$.*

Solución

$f'(x) = (2x+2)\cos(x) - (x^2 + 2x + 1)\operatorname{sen}(x)$ y $f'(0) = 2$.

Para hallar la recta tangente, falta hallar el término independiente. Sabemos que su pendiente es 2 y que pasa por el punto $P = (0, 1)$, por lo tanto $1 = 2 \cdot 0 + n$ y $n = 1$.

La ecuación de la recta tangente es $t(x) = 2x + 1$.

Matemática Inicial

Segunda prueba, 30 de junio de 2023. SOLUCIÓN

Número de Prueba	Nombre	Cédula	Grupo

Los procedimientos de esta versión son equivalentes a la versión anterior, por lo tanto aparecen los resultados solamente, sin la justificación.

Ejercicio 1 (10 puntos) *Calcular los siguientes límites:*

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-10x+8}{x^2+3x-4}$$

(b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x^2+9}-6}{x-3}$$

Solución

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-10x+8}{x^2+3x-4} = -1$$

(b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x^2+9}-6}{x-3} \frac{3}{2}$$

Ejercicio 2 (17 puntos) *Sea* $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 4\sqrt{27-x}$.

(a) *Probar que* f *es inyectiva,*

(b) *Hallar el conjunto imagen de* f*,*

(c) *Modificar el codominio para que la función sea biyectiva y para dicho codominio hallar* f^{-1}.

Solución

(a) Ver solución en la otra versión.

(b) $Im(f) = [20, +\infty)$

(c) $f^{-1}(x) = 27 - \frac{x^2}{16}$.

Ejercicio 3 (18 puntos) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x \geq 2 \\ a(x-4) & si\ x < 2 \end{cases}$$

(a) *Hallar* a *para que* f *sea una función continua en* $\mathbb{R}$.

(b) *Sea* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $g(x) = e^{x-1}$. *Usando el valor de* a *hallado en la parte anterior, hallar* $f \circ g$.

(c) *Hallar* $(g \circ f)'(5)$ *y* $(g \circ f)'(1)$.

Solución

(a) $a = -2$ para que f sea una función continua en $\mathbb{R}$.

(b)

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2(x-1)}-4}{e^{x-1}-2} & \text{si } x > \ln 2 + 1 \\ -2(e^{x-1} - 4) & \text{si } x \leq ln2 + 1 \end{cases}$$

(c) $(g \circ f)'(5) = e^6$ y $(g \circ f)'(1) = -2e^5$.

Ejercicio 4 (10 puntos) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = (x^3 + 2x + 3)\ln(x)$. *Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de* f *en el punto* $P = (1, 0)$.

Solución
$t(x) = 6x - 6$

Ej 1.	Ej 2.	Ej. 3	Ej. 4	Total