Universidad de la República – Facultad de Ingeniería – IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

SEGUNDO PARCIAL – 18 DE NOVIEMBRE DE 2023. DURACIÓN: 3:30 HS

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

RESPUESTAS MO	
Ej 1	Ej 2

PARA USO DOCENTE					
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	**Total**

Ejercicio 1. (Correcta: 8 puntos. Incorrecta: -1 punto. No responder: 0 puntos)

Sean $f_n, g_n : (\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}$ tales que $f_n(x) = (\cos(x))^n$ y $g_n(x) = (\operatorname{sen}(x))^n$. Indicar la opción correcta:

(A) $\{f_n\}$ converge uniformemente y $\{g_n\}$ converge uniformemente.
(B) $\{f_n\}$ converge uniformemente y $\{g_n\}$ no converge uniformemente.
(C) $\{f_n\}$ no converge uniformemente y $\{g_n\}$ converge uniformemente.
(D) $\{f_n\}$ no converge uniformemente y $\{g_n\}$ no converge uniformemente.

Ejercicio 2. (Correcta: 8 puntos. Incorrecta: -1 punto. No responder: 0 puntos)

Sean $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x + \pi$ y $\{a_n\}_{n \geq 0}$ tal que:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = f(x) \text{ para todo } x \in [0, \pi].$$

Entonces:

(A) $a_9 = \dfrac{1}{9}$.
(B) $a_{2n-1} = 0$, para todo $n \geq 1$.
(C) $a_{2n} = 0$, para todo $n \geq 1$.
(D) $a_8 = \dfrac{1}{64}$.

Ejercicio 3. (14 puntos)

Enunciar y demostrar el primer teorema de Liapunov (Liapunov 1).

Ejercicio 4. (16 puntos)

Se considera la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} &= xy^2 \\ \dot{y} &= -yx^2 \\ \dot{z} &= -z^3 \end{cases}$$

1. Hallar los puntos de equilibrio.
2. Probar que los puntos de equilibrio no pueden ser asintóticamente estables.
3. Estudiar la estabilidad del $(0, 0, 0)$.
4. Estudiar la estabilidad del $(0, y, 0)$ con $y \neq 0$.
5. Estudiar la estabilidad del $(1, 0, 0)$.

Ejercicio 5. (14 puntos)

Sea $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase $\mathcal{C}^2$ en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que verifica:

- $u_t = u_{xx}$, en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$.
- $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty)$.
- $u(0, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

1. Usando el método de separación de variables, hallar un candidato a solución que sea de la forma $u(t, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x)$.

2. Probar que $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x)$. Enunciar los resultados que se utilicen.