Práctico 12

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL.

Matriz asociada a una transformación lineal

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ en los siguientes casos.
   a) $\mathcal{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.
   b) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.
   c) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,3),(2,5)\}$.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$ {}_{\mathcal{U}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, $$
   donde $\mathcal{E} = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ y $\mathcal{U} = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$.
   a) Hallar $T(x^2+x-1)$.
   b) Hallar la expresión general de $T(p)$ siendo $p = ax^2+bx+c$ un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y la transformación
$$ T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) $$
   definida por
$$ T(B) = AB. $$
   a) Demostrar que T es lineal.
   b) ¿Existen bases en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea justamente A?. Justifique la respuesta.
   c) Para
$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, $$
   hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$ T(x,y,z) = (2x-y+z, 3y-z, x+2y+z). $$
   Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por
$$ \mathcal{A} = \{(1,0,1),(-1,1,2)\}. $$
   Hallar la matriz asociada de la restricción de T a S, $T|_S\colon S \to \mathbb{R}^3$, utilizando $\mathcal{A}$ como base de S y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Hallar las dos matrices de cambio de base entre la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base
$$ \mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,1),(-1,0,1)\}, $$
   es decir, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}}$ siendo $T = Id_{\mathbb{R}^3}$. Verificar que esta matriz de cambio de base es la inversa de la otra matriz de cambio de base que se puede definir.

6. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

   a) Demostrar que existen $k \in \mathbb{N}$, B base V y C base de W tal que la matriz asociada en estas bases esta dada por

   $$({}_C(T)_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

   b) Sea $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(a,b,c,d,e) = \begin{pmatrix} a-d & -a+b+3c-3d \\ b+3c-3d-e & d-e \end{pmatrix}.$$

   Hallas bases B y C de $\mathbb{R}^5$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivamente, tal que la matriz asociada a T en esas bases sea

   $${}_C(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$