Clase 36 :

Integrales

CDIVV - 2023 - 2sem

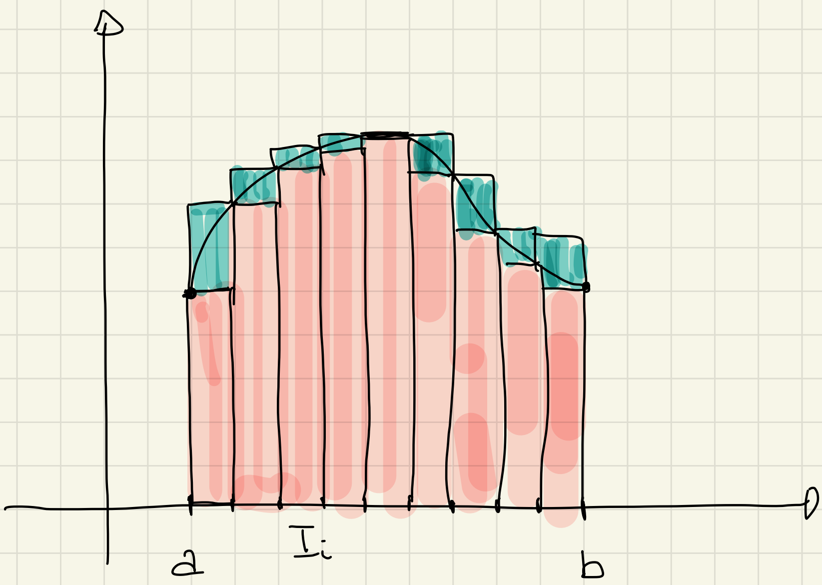
Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Repaso integrales en una variable

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función acotada

intervalo acotado



$\bigcup_{i \in \Lambda} I_i = [a,b]$

$$s(f,P) = \sum_i \ell(I_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x)$$

$$S(f,P) = \sum_i \ell(I_i) \sup_{x \in I_i} f(x)$$

Para toda partición $\mathcal{P}$

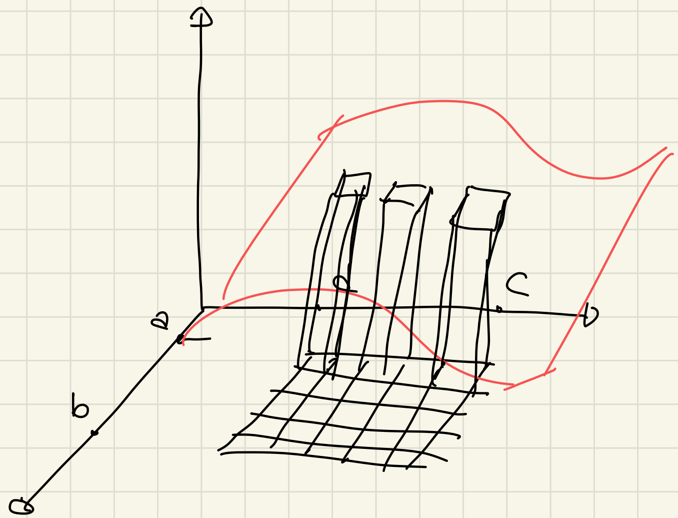
$$s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$$

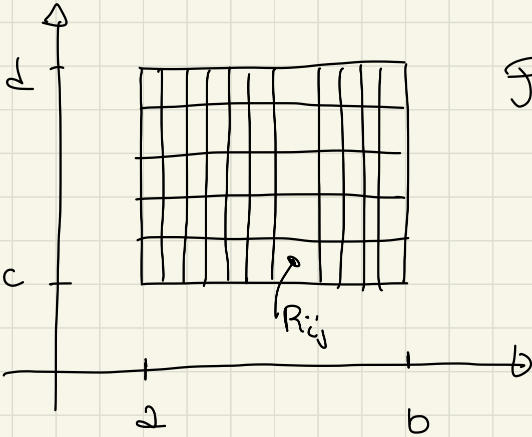
$$s(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,\mathcal{P})$$

Si f es integrable

Integrales dobles

$$f: \overset{D}{\overbrace{[a,b]\times[d,c]}} \longrightarrow \mathbb{R}$$





$$\mathcal{P} = \bigcup_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} R_{ij}$$

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i,j} A(R_{ij}) \cdot \inf_{x\in R_{ij}} f(x)$$

suma inferior de f
en $\mathcal{P}$

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i,j} A(R_{ij}) \sup_{x\in R_{ij}} f(x)$$

A medida que vamos afinando $\mathcal{P}$.

$$s(f) = \sup_{\substack{\mathcal{P} \text{ partición}\\ \text{de } D}} \left(s(f,\mathcal{P}) \right)$$

$$S(f) = \inf_{\substack{\mathcal{P} \text{ partición} \\ \text{de } D}} \left(S(f,\mathcal{P}) \right).$$

f es integrable si $s(f) = S(f)$

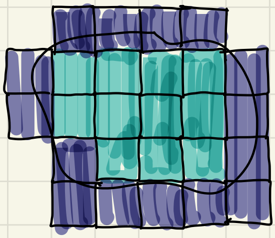
en dicho caso denotamos por

$$\iint_D f$$ a ese valor.

¿Qué pasa si D es una región de $\mathbb{R}^2$ que no es un cuadrado?

¿$\iint_D f$ cómo se define?

Medida de Jordan



D

$A_n^-(D) =$ Área por defecto de D con cuadraditos de tamaño $1/n$

$A_n^+(D) =$ Área por exceso de D con cuadraditos de tamaño $1/n$

$$A^-(D) = \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n^-(D) \qquad A^+(D) = \inf_{n\in\mathbb{N}} A_n^+(D)$$

D es medible Jordan si $A^-(D) = A^+(D)$ y ese valor es la medida de Jordan.

$$m(D)$$

Integral

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada

$D \subset \mathbb{R}^2$ conjunto medible Jordan.

$\mathcal{P} = \{ D_1, \ldots, D_n \}$ es una partición de D

sii

1) D_i es medible Jordan $\forall i = 1, \ldots, n$

2) $\bigcup_i D_i = D$

3) $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_i m(D_i) \cdot \inf_{x \in D_i} f(x)$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_i m(D_i) \sup_{x \in D_i} f(x)$$

Si $\sup \{ s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición} \}$

$=$

$\inf \{ S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición} \}$

decimos que f es integrable en D y denotamos a ese valor como $\boxed{\iint_D f}$

Propiedades

LINEALIDAD

1) f y g continuas en D, conjunto medible Jordan

$$\boxed{\iint_D \alpha f + \beta g = \alpha \iint_D f + \beta \iint_D g}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ADITIVIDAD RESPECTO AL DOMINIO

2) $D = D_1 \cup D_2$ conjuntos medibles, no se solapan

$$\boxed{\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f}$$

$\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \phi$

3) Si $f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f \geq 0$

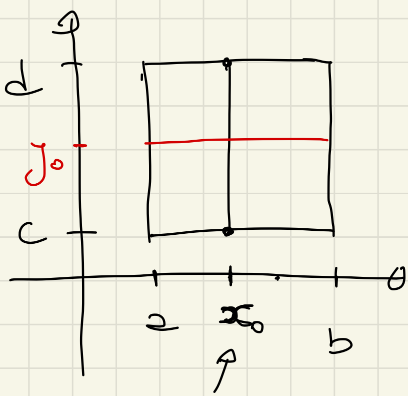
4) $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in D$ $\Rightarrow \iint_D f \geq \iint_D g$.

5) $\left| \iint_D f \right| \leq \iint_D |f|$

Integrales iteradas

$D = [a,b] \times [c,d]$

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$



fijo x_0

$\iint_D f$

$g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(y) = f(x_0, y)$

$$\int_c^d g(y)\,dy = \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\varphi(x)}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

integrales iteradas

Teorema de Fubbini

$D = [a,b] \times [c,d]$

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 y^3$ en $D = [0,1] \times [1,2]$

$$\iint_D f \underset{\text{Fubbini}}{=} \int_0^1 \int_1^2 x^2 y^3\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left(\int_1^2 y^3\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{y^4}{4}\Big|_1^2 \, dx$$

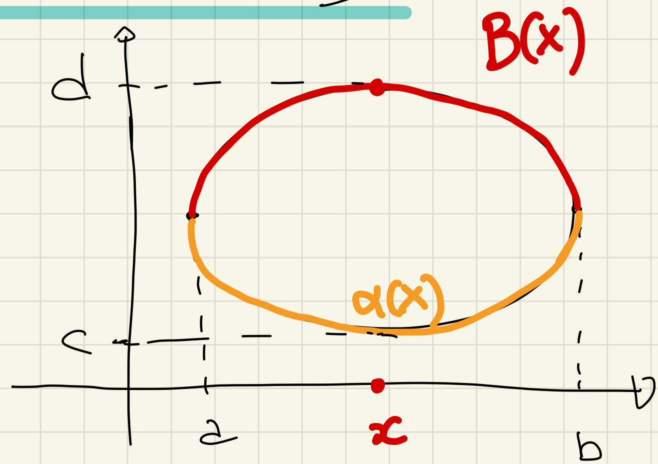
$$= \int_0^1 x^2 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) dx$$

$$= \frac{15}{4} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{15}{4} \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

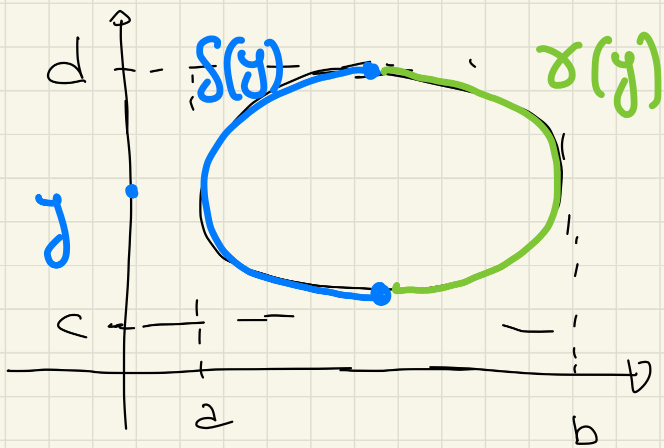
$$= \frac{15}{4} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{4}$$

Teorema de Fubbini II

$D =$



$D =$



$$\boxed{\iint_D f = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{B(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\,dx\,dy}$$

Ejercicio