Solución Práctico 10

1. a. Una base del subespacio S_1 es $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ y una base de S_2 es $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

   La suma de los subespacios es $\mathbb{R}^3$ y una base es $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$.

   Una base de la intersección es $\{(0,1,0)\}$.

   La suma no es directa pues la intersección de los subespacios no es trivial.

   b. Una base del subespacio S_1 es $\{x^2\}$ y una base de S_2 es $\{x^2+1,x\}$.

   La suma de los subespacios es todo el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ y una base es la unión de las bases de cada subespacio $\{x^2+1,x^2,x\}$.

   La intersección de los subespacios es trivial y por lo tanto, la suma es directa.

2. b. Dado que la intersección de las bases de los subespacios contiene al vector $(0,4,-1,1)$, la recta por el origen con vector director $(0,4,-1,1)$ está en la intersección de estos, es decir $S_1 \cap S_2 \neq \{(0,0,0,0)\}$ y la suma no es directa.

   Sin embargo, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$ pues la unión de las bases de cada uno, es una base de $\mathbb{R}^4$.

3. c. Esto es falso. Si $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x,y,0,0)\}$ y $S_2 = \{(0,y,z,0)\}$, tenemos que $\dim(S_1)+\dim(S_2) = 2+2 = 4$. Sin embargo, $S_1 \cap S_2 = \{(0,y,0,0)\}$ que es un subespacio de dimensión 1.

4. b. Esto es falso. Sea $S_1 = \{z = 0\}$ y su base $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, sea $S_2 = \{x = 0\}$ y su base $\{(0,2,0),(0,0,1)\}$. Entonces la intersección de sus bases es vacía. Sin embargo, $S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\} \neq (0,0,0)$.