Solución Práctico 9

- 1, a. Observamos primero que como los vectores (x, y, z) que están en el subespacio cumplen la relación $x + 2y - z = 0$, tenemos que estos son de la forma $(x, y, x + 2y)$. Es decir, podemos reescribir al subespacio como $S = \{(x, y, x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, x) + (0, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Concluimos que todos los vectores de S se escriben como combinación lineal de los vectores $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ y por lo tanto, éste es un generador. Además, es un conjunto L.I. y por lo tanto, es una base del subespacio y la dimensión de éste es 2.
- b. Razonando de forma análoga, consideramos un elemento $p \in \mathbb{R}_3[x]$ y le imponemos la condición para que pertenezca al subespacio: si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, debe cumplirse que

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0$$

De aquí podemos despejar d en función de los otros parámetros y reescribimos el subespacio S como

$$S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = a(x^3 - 8) + b(x^2 - 4) + c(x - 2)\}$$

Por lo que el conjunto $\{x^3 - 8, x^2 - 4, x - 2\}$ es un generador de S . Además éste es un conjunto L.I. por lo que es una base del subespacio S y la dimensión de S es 3.

- c. De forma análoga a las partes anteriores, consideramos un elemento genérico del espacio vectorial y le imponemos las condiciones para pertenecer al subespacio. Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in S \iff A = A^T \iff \begin{cases} b = d \\ c = g \\ f = h \end{cases}$$

Es decir, $A \in S$ si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todo elemento del subespacio se escribe como combinación lineal de las matrices anteriores y éstas forman un conjunto L.I., concluimos que una base del subespacio es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y su dimensión es 6.

- d. Una base del subespacio es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y su dimensión es 3.

2. a. Sabemos que el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, por lo tanto, es claro que sobra un vector; es decir, alcanza sacar un vector del conjunto para obtener una base.

Observamos que el vector $(1, 2, 6)$ es combinación lineal de los otros y por lo tanto, una base del subespacio es el conjunto $\{(1, -1, 2), (4, -3, 7), (2, 0, 5)\}$.

- b. El espacio vectorial tiene dimensión 4 por lo que alcanza sacar una de las matrices. Observamos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las anteriores y por lo tanto, una base del subespacio es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. a. Dado que el espacio es $\mathbb{R}^4$ que tiene dimensión 4, debemos agregar dos vectores al conjunto para obtener un conjunto L.I. con 4 vectores que será una base.

Por un resultado visto en el teórico, sabemos que si $v \notin [S]$ entonces $S \cup \{v\}$ es un conjunto L.I., por lo que podemos estudiar qué vectores son los generados por el conjunto S . Es decir, dado un vector $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, veamos qué condiciones deben cumplir sus coeficientes para que existan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1, 0, 2, 2) + \beta(1, 1, 0, 0) = (a, b, c, d)$$

Esto se cumple sii se verifica el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta = b \\ 2\alpha = c \\ 2\alpha = d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema vemos que los vectores generados por el conjunto son los de la forma $(a, b, 2a - 2b, 2a - 2b)$. Por lo tanto, si agregamos al conjunto un vector que no cumpla esta relación entre sus coeficientes, obtendremos un conjunto L.I.

Consideramos $(0, 0, 1, 0) \notin [S]$ y tenemos que

$$S' = \{(1, 0, 2, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

es un conjunto L.I.

Repitiendo el procedimiento con los vectores de S' , tenemos que el vector $(0, 0, 0, 1) \notin [S']$ y por lo tanto, el conjunto $S' \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$ es una base de V .

- b. Observar que con los elementos de S no podemos generar a los polinomios de grado 3 por lo que podemos agregar x^3 al conjunto, obteniendo un nuevo conjunto $S' = \{1 - x + x^2, x - x^2, x^3\}$ que es L.I. Ahora, razonamos de la misma forma que en la parte anterior: sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_2[x]$, tenemos que $p \in [S']$ si existen α, β, γ tales que

$$\alpha(1 - x + x^2) + \beta(x - x^2) + \gamma x^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Es decir,

$$\begin{cases} \gamma = a \\ \alpha - \beta = b \\ -\alpha + \beta = c \\ \alpha = d \end{cases}$$

Este sistema es compatible sii $c = -b$. Es decir, cualquier polinomio como antes tal que $c \neq -b$ no es generado por el conjunto S' por lo que lo puedo agregar obteniendo un nuevo conjunto L.I. de 4 elementos. Tomando por ejemplo $a = b = d = 0, c = 1$, tenemos que $S' \cup \{x\} = \{1 - x + x^2, x - x^2, x^3, x\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. a. Dado que el conjunto tiene 3 elementos, para ver que es una base alcanza probar que es un conjunto L.I. Esto lo podemos ver construyendo una matriz cuyas columnas sean los vectores del conjunto y verificando que el rango de la misma es 3, lo cual se cumple.

Para hallar las coordenadas de v en la base, buscamos la combinación lineal de los vectores de la base que da v . Es decir, buscamos los $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (1, 2, 3)$$

Para esto, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = 3 \end{cases}$$

de donde $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 1$ y las coordenadas de v en la base son $(0, 2, 1)$.

- b. El razonamiento es análogo al de la parte anterior. Las coordenadas de v en la base son $(34/11, -9, 12/11, 3/11)$.

5. Veamos para cuáles valores de α el conjunto es L.I.: Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$\lambda_1(1 + t) + \lambda_2(1 + \alpha t + t^2) + \lambda_3(1 + t^2) = 0$$

vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces debe cumplirse que

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado solo para $\alpha \neq 0$. Es decir, para $\alpha \neq 0$, el conjunto es L.I.

Además para estos α , si consideramos $p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

es compatible y por lo tanto, el conjunto genera a todo polinomio de grado menor o igual a 2.

6. a. Notar que $\text{Ker}(A) = \text{Sol}(S)$ donde S es el sistema $AX = 0$.

Consideramos entonces la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y el sistema $AX = 0$. Escalerizando obtenemos que éste es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Tenemos entonces que la matriz tiene rango 2 y resolviendo el sistema llegamos a que $AX = 0$ sii $X = (z, -2z, z)$. Es decir, $\text{Ker}(A) = [(1, -2, 1)]$ y por lo tanto, $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$.

- b. El rango de la matriz es 2 y la dimensión de su núcleo es 2.
c. El rango de la matriz es 3 y la dimensión de su núcleo es 2.