Solución Práctico 8

1. a. El vector v es combinación lineal de los elementos de A y la combinación lineal es

$$1.(1,2,1)+1.(3,-1,5)+(-1)(1,1,0)$$

c. El vector v es combinación lineal de A y la combinación lineal es

$$2(1,3,2,1)+1(2,-2,-5,4)+(-1)(2,-1,3,6)$$

e. El vector v no es combinación lineal de A. Para ver esto, nos preguntamos si existen escalares α,β,γ tales que

$$-3x^3+4x^2+x-2=\alpha(3x^3+x)+\beta(-2x^2+x-1)+\gamma(2x-1)$$

Para que estos polinomios sean iguales, tenemos que igualar coeficiente a coeficiente y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\alpha+3\gamma=-3 \\ -2\beta-2\gamma=4 \\ \alpha+\beta+2\beta=1 \\ -\beta-\gamma=-2 \end{cases}$$

que es incompatible. Es decir, no existen α,β,γ que realicen la combinación lineal.

f. El vector v es combinación lineal de A: Para ver esto, nos preguntamos si existen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de esto, podemos armar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=2 \\ -\beta-2\gamma=-1 \\ \beta+2\gamma=1 \\ \alpha+\gamma=2 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado y una de las soluciones es $(2,1,0)$, es decir, una combinación lineal de los elementos de A que da el vector v es

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+0\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a. Para encontrar un generador, reescribimos al conjunto como $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z=-x-y\}$. Ahora imponemos esa condición sobre los puntos genéricos (x,y,z) y obtenemos $S=\{(x,y,-x-y)\colon x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,0,-x)+(0,y,-y)\colon x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1)\colon x,y\in\mathbb{R}\}$. Concluimos que todo vector del subespacio S puede escribirse como una combinación lineal del conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, y por lo tanto éste es un generador de S.

b. Para encontrar un generador de S veamos primero cómo son los elementos de este conjunto. Sea p un polinomio cualquiera de grado menor o igual a 3, entonces p es de la forma $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Para que $p\in S$, debe cumplirse que $p(1+x)=p(1-x)$, es decir

$$a(1+x)^3+b(1+x)^2+c(1+x)+d=a(1-x)^3+b(1-x)^2+c(1-x)+d$$

Desarrollando los términos, llegamos a que las condiciones sobre los coeficientes de p son $a = 0$ y $c = -2b$. Es decir, $p \in S$ sii $p(x) = bx^2 - 2bx + d = b(x^2 - 2x) + d.1$. Por lo que el conjunto $\{x^2 - 2x, 1\}$ es un generador de S.

c. Un generador de S es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. a. El conjunto es un generador de V. Para ver esto, consideramos un vector $(x, y) \in V$ genérico y verificamos que existan escalares α, β tales que

$$\alpha(1, \pi) + \beta(\sqrt{2}, e) = (x, y)$$

Para que esto suceda, deben cumplirse las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \sqrt{2}\beta = x \\ \pi\alpha + e\beta = y \end{cases}$$

A partir de esto podemos plantear una matriz y observar que tiene rango 2, por lo tanto el sistema es compatible determinado. Es decir, existen α y β que verifican ambas ecuaciones y por lo tanto, realizan la combinación lineal para cualquier vector (x, y).

b. Es un generador. Análogamente a la parte anterior, nos preguntamos si para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ existe una combinación lineal A que nos dé este vector. Eso se traduce a clasificar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = z \end{cases}$$

Nuevamente planteando la matriz puede observarse que el sistema es compatible determinado cualquiera sea (x, y, z) y por lo tanto el conjunto A es un generador.

c. Es un generador. Se prueba de forma análoga a la parte anterior.

d. Es un generador. Verificamos que existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donde esta última es una matriz genérica. A partir de esto podemos plantear el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\gamma = a \\ \alpha - \gamma = b \\ 2\beta + 3\delta = c \\ \beta + \delta = 1 \end{cases}$$

Vemos que para cualquier $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esto es un sistema compatible determinado, donde los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quedan determinados en función de las entradas de la matriz genérica.

e. Es un generador.

4. Una forma de probar esto es verificar que podemos construir los elementos de A_2 a partir de los de A_1 y viceversa.

   Tenemos que los vectores de A_1 cumplen que

$$(-2,-6,0) = -2(1,2,-1) - 2(0,1,1)$$

$$(1,1,-2) = 1(1,2,-1) - 1(0,1,1)$$

   Por lo que, a partir de A_2 podemos generar a todo vector generado por estos.

   Hay que verificar que vale al revés.

5. a. El conjunto A No es L.I. Para verificar esto, planteamos una combinación lineal de los vectores de A y la igualamos al vector nulo.

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(1,1,1) + \alpha_4(2,3,4) = (0,0,0)$$

   A partir de esto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

   que es compatible indeterminado, es decir, existen escalares no todos nulos que realizan la combinación lineal.

   Un subconjunto L.I. es $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$. Observar que la cantidad de vectores L.I. del conjunto es igual al rango de la matriz correspondiente al sistema.

   b. El conjunto A L.I. Para ver esto, razonamos análogamente a la parte anterior y obtenemos un un sistema de 4×4. En este caso, la matriz correspondiente a este sistema tendrá rango 4.

   c. No es L.I. y un subconjunto L.I es $\{p_1, p_2, p_3\}$ pues existe una combinación lineal de ellos que da el polinomio p_4.

6. a. El conjunto es L.D. para cualquier valor de a. Para ver esto, planteamos una combinación lineal de los vectores del conjunto y la igualamos al vector nulo. Como en partes anteriores, eso nos da un sistema de ecuaciones y podemos ver que la matriz correspondiente es

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ a^2 & a & 2a^2 \\ 1 & a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

   Podemos escalerizarla y ver que tiene rango menor a 3 o estudiar su determinante. Haciendo esto último, llegamos a que $det(M) = 0$ para cualquier valor de a.

   Además, un subconjunto L.I. es $\{(a,a^2,1),(-1,a,a)\}$ pues

$$(0,2a^2,a^2+1) = 1.(a,a^2,1) + a.(-1,a,a)$$

   b. El conjunto es L.I. siempre que $a \neq 2,-1$. Para ver esto, planteamos una combinación lineal de los elementos igualada al vector nulo:

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema, armamos la siguiente matriz y estudiamos su determinante

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Tenemos que $\det(M) = -2a^2 + 2a + 4$. Esto se anula sii $a = -1$ y $a = 2$. Es decir, para $a \neq -1, 2$ el sistema es compatible determinado y por lo tanto el conjunto es L.I. Para los otros valores de a, el conjunto es L.D.

Si $a = 2$ entonces un subconjunto L.I. es $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$

Y si $a = -1$ un subconjunto L.I. es $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$

7. El conjunto ya es L.I. y genera a todo el espacio de matrices de 2×2

8. a. 1. Las funciones son L.I.
      2. Las funciones son L.D. Podemos observar en el gráfico que g es $f + k$ donde k es una constante (g es simplemente f trasladada hacia arriba). Además, la función h es constante, por lo tanto, podemos multiplicarla por un escalar y obtener la constante k de modo que $g = f + \lambda h$.

   b. 1. Las funciones son L.D. Alcanza observar que ambas son polinomios de grado 1 por el origen, es decir, son de la forma $f(x) = ax$, $g(x) = bx$ donde a y b son constantes no nulas. Es claro que podemos tomar $\lambda = b/a$ y tenemos que $g(x) = \lambda f(x)$.
      2. Las funciones son L.D.
      3. Las funciones son L.I. Tenemos que $f(x) = ax + b$ y $g(x) = ax + c$. Para que fueran L.D. debería existir una combinación no trivial de estas funciones que dé la función nula. Esto no es posible.
      4. Las funciones son L.I. Para ver esto, supongamos que $f(x) = ax$ y $g(x) = cx + d$. Tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y planteamos la siguiente combinación lineal

      $$\alpha ax + \beta(cx + d) = 0$$

      Para que esto se cumpla para todo $x \in \mathbb{R}$, se debe cumplir lo siguiente

      $$\begin{cases}\alpha a + \beta c = 0\\ \beta d = 0\end{cases}$$

      que es un sistema compatible determinado y por lo tanto la única combinación lineal que da la función nula es la trivial.
      5. Las funciones son L.D. Esto es porque ambas funciones son polinomios de grado 2 y tienen las mismas raíces.
      6. Las funciones son L.D. Pensar análogamente a la parte a.2)
      7. Las funciones son L.I.

9. Lo que queremos probar es que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ cumplen que

$$\alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x) + \alpha_3 sen(2x) + \alpha_4 cos(2x) = 0$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.
Tenemos que si los coeficientes cumplen la ecuación anterior para todo x, entonces en particular se cumple que:

- Para $x = 0$, la ecuación es: $\alpha_2 + \alpha_4 = 0$
- Para $x = \pi/4$: $\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} + \alpha_3 = 0$
- Para $x = \pi/2$: $\alpha_1 - \alpha_4$
- Para $x = \pi$: $-\alpha_2 + \alpha_4$

Armamos entonces la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Que tiene rango 4 por lo que el sistema es compatible determinado y la única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

10. a. Ver manual del curso.
    b. Supongamos que el conjunto $\{u, v, w\}$ es L.I. y sean α, β, γ tales que

$$\alpha(u + v) + \beta v + \gamma(w - v + u) = 0_V$$

Operando llegamos a que entonces debe cumplirse que

$$(\alpha + \gamma)u + (\alpha + \beta - \gamma)v + \gamma w = 0_V$$

Dado que $\{u, v, w\}$ es L.I., tenemos que

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y concluimos que $\{u + v, v, w - v + u\}$ es un conjunto L.I.
El recíproco es análogo.

11. a. Falso: Esto ocurre únicamente cuando el $rg(A) = n$.
    b. Verdadero. Notar que como $\lambda_1 Av_1 + ... + \lambda_n Av_n = A(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)$, si existieran $\lambda_1, ..., \lambda_n$ no todos nulos, tales que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$, entonces tendríamos que el conjunto B no es L.I.
    c. Verdadero. Es simplemente el contrarrecíproco de la parte anterior.

12. a. Recomendación: plantear una combinación lineal, usar la definición del vector v y reordenar los términos de la suma para usar que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es L.I.

b. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1(v_1 - v) + ... + \lambda_n(v_n - v) = 0_v$$

Esto podemos reescribirlo como

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n - (\lambda_1 + ... + \lambda_n)v = 0_V$$

Usando la parte anterior, tenemos que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$ y la ecuación anterior queda

$$\lambda_1 v_1 + ... \lambda_n v_n = 0_V$$

Dado que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es L.I., necesariamente $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$

c. Si $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ entonces alcanza tomar $\lambda_i = a_i$ para obtener

$$\lambda_1(v_1 - v) + ... + \lambda_n(v_n - v) = (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) - \big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\big)v =$$

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_v - \big(\sum_{i=1}^n a_i\big)v = v - 1.v = 0$$

13. a. El conjunto es L.I.
    b. El conjunto es L.I.

Ambas partes pueden verificarse razonando como en el ejercicio 9 y considerando tres valores distintos de x.