Clase 31

teo. fund. del cálculo → 1º) Relación integración y derivada.

→ 2º) Descripción de las primitivas.

2º teo. F es una prim. de f, f cont. en $[a,b]$

$$\Rightarrow F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,dt$$

1º teo. Si $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, x_0 pto de cont. de f $\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$

Corolario 1 (linealidad de las primitivas)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas

Sea F una primitiva de f y

Sea G " " " g.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$\alpha F(x) + \beta G(x)$ es una primitiva de $\alpha f(x) + \beta g(x)$.

Dem. Fijamos $c \in [a,b]$

$$\underset{2^o TFC}{\Rightarrow} F(x) = \int_c^x f(t)\,dt + C_1 \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \int_c^x g(t)\,dt + C_2 \quad , \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x) = \int_c^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt + \underbrace{(\alpha C_1 + \beta C_2)}_{\text{cte.}}$$

$$\underset{1^o TFC}{\Rightarrow} (\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(t)$$

$\Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ es una primitiva de $\alpha f(x) + \beta g(x)$

$\boxed{\text{Obs. también sale derivando directamente}}$

Corolario (Regla de Barrow)

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont y F es una primitiva de f entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \underset{\text{notación}}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

<u>Dem.</u> Por el 2º teorema fund. del cálculo

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \quad , \forall x \in [a,b]$$

$$x = b : \quad F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) .$$

<u>Algunas primitivas:</u>

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{(\alpha+1)\,x^{\alpha}}{\alpha+1} = x^{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq -1$$

Luego, una primitiva de x^α es $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

<u>Notación de Leibniz:</u> $\boxed{\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ , \ \alpha \neq -1}$

donde $C \in \mathbb{R}$ representa cualquier constante

i.e. El conjunto de todas las primitivas de x^α (si $\alpha \neq -1$) es $\left\{ \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}$

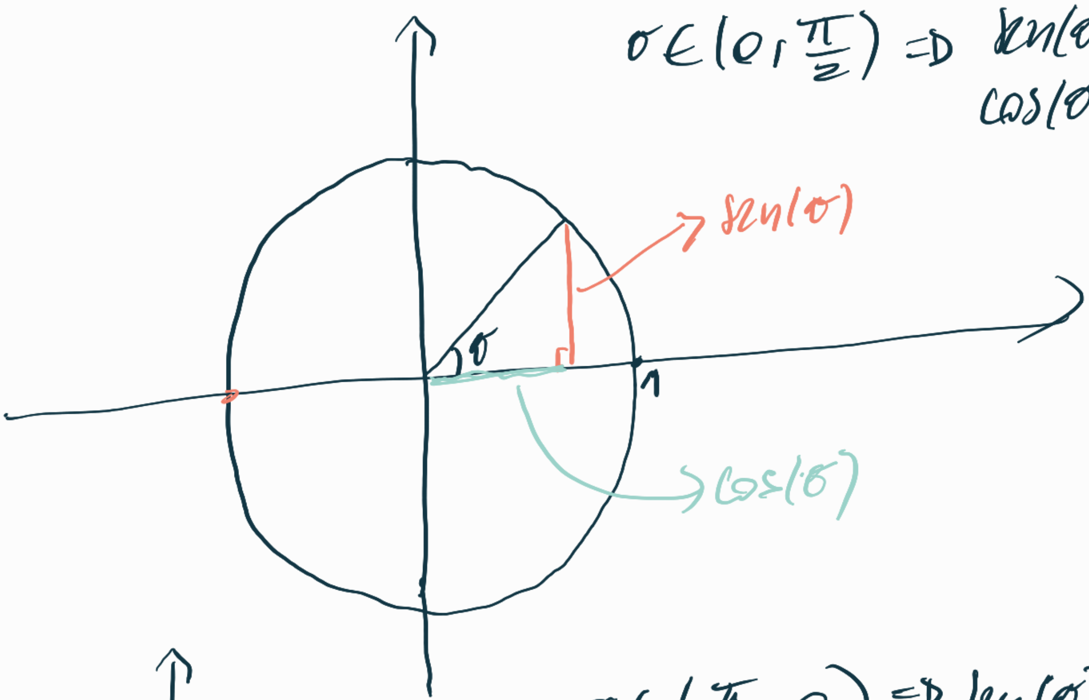
$$\log(x) \overset{def}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \underset{TFC}{\Longrightarrow} \log'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\Rightarrow \log(x)$ es una primitiva de x^{-1}

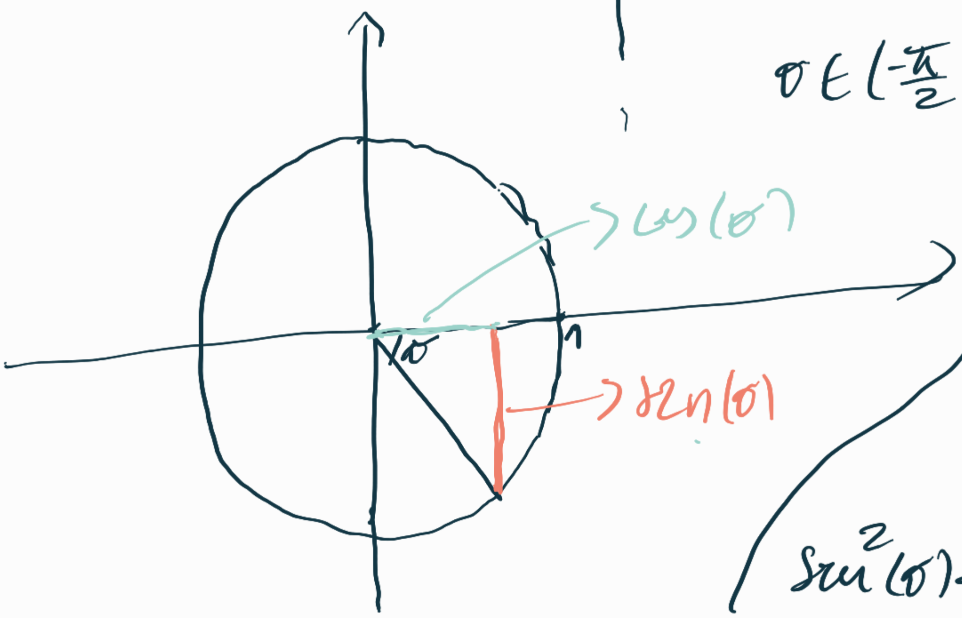
$$\therefore \boxed{\int x^{-1}\,dx = \log(x) + C}$$

- $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$
$\cos(\theta) > 0$



$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) < 0$
$\cos(\theta) > 0$



$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) \\ &\cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ &\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}(\theta) \\ &\cos(\pi-\theta) = \cos(\theta) \\ &\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \end{aligned}}$$

- $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$

$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \Rightarrow -\cos'(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \cos(x)\,dx &= \operatorname{sen}(x) + C \\ \int \operatorname{sen}(x)\,dx &= -\cos(x) + C \end{aligned}}$$

- $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x} \Rightarrow \boxed{\int e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \ \alpha \neq 0}$

<u>Ejercicio:</u> Calcular las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (t^2 + \operatorname{sen}(t))\,dt$

ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2\cos(t) - e^{-2t})\,dt$

<u>Solución:</u> i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (t^2 + \operatorname{sen}(t))\,dt \overset{\text{Barrow}}{=} \left(\frac{t^3}{3} - \cos(t)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2}$

$$= \underbrace{\frac{\pi^3/8}{3}}_{\pi^3/24} - \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} - \left(\underbrace{\frac{0}{3}}_{=0} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right)$$

$$= \frac{\pi^3}{24} + 1 .$$

Below

$$ii) \quad \int_0^{\pi} \left(2\cos(t) - e^{-2t}\right) dt \overset{\downarrow}{=} 2\,\mathrm{sen}(t) - \frac{e^{-2t}}{(-2)} \Bigg|_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= 2\underbrace{\mathrm{sen}(\pi)}_{=0} + \frac{e^{-2\pi}}{2} - \left(2\underbrace{\mathrm{sen}(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{e^{0}}{2}}_{=1/2}\right)$$

$$= \frac{e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi} - 1\right).$$

<u>Recordar</u>: $h(t) = f(g(t)) \Rightarrow h'(t) = f'(g(t)).g'(t)$

Si $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t$

Si $h(t) = e^{g(t)} \Rightarrow h'(t) = e^{g(t)} . g'(t)$

$$\boxed{h(t) = \frac{e^{-2t}}{-2} = \frac{(-2).e^{-2t}}{-2} = e^{-2t}}$$

Ejercicio: Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\,dt$

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}(2t)\right) = \cos(2t).2$$

notación: derivada con respecto de t

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right) = \cos(2t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \cos(2t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + C}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\,dt = \left.\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2}$$

$$= 0$$

Ejercicio: Usando el 2º teo. fund. del cálculo calcule las derivadas de las siguientes funciones:

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2+t}{1+t^2}\,dt$

- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $g(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{2+t}{1+t^2}\,dt$

- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $h(x)=\displaystyle\int_{2x-1}^{x^2} \frac{2+t}{1+t^2}\,dt$ ———

Solución:

$$\boxed{\cdot\ f'(x)=\frac{2+x}{1+x^2}}$$ (1er TFC)

- $g(x)=f(x^2) \Rightarrow g'(x)=f'(x^2).(2x)$

$$=\frac{2+x^2}{1+x^4}.(2x).$$

$$\bullet\ h(x) = \int_0^{x^2} \frac{2+t}{1+t^2}\,dt - \int_0^{2x-1} \frac{2+t}{1+t^2}\,dt$$

$$= f(x^2) - f(2x-1)$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(x^2).(2x) - f'(2x-1).2$$

$$= \frac{2+x^2}{1+x^3}.(2x) - \frac{(2+2x-1)}{1+(2x-1)^2}.2$$

$$= \frac{4x+2x^3}{1+x^4} - \frac{4x+2}{4x^2-4x+2}$$

<u>Obs.</u> En general podemos aplicar el 2° TFC para calcular la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\,dt$

Si $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,dt \Rightarrow f(x) = G(\beta(x)) - G(\alpha(x))$

$\Rightarrow f'(x) = g(\beta(x)).\beta'(x) - g(\alpha(x)).\alpha'(x)$

Derivada de la función inversa y aplicación al arctg.

Recordar (la derivada de la función compuesta)

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Def: Si $f : I \to J$ es una función biyectiva $\Rightarrow$ la función inversa de f es

$$f^{-1} : J \to I \;/\; f^{-1}(f(x)) = x$$

Obs: No confundir $f^{-1}(x)$ con $\dfrac{1}{f(x)}$ son dos cosas diferentes.

Ej: $f(x) = 2x-1 \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{2x-1}_{y}) = x$

$$y = 2x-1 \Rightarrow y+1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2} \quad \text{pero} \quad \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{2y-1}$$