

Radiación en la atmósfera

VIII - Transferencia radiante en medios dispersivos (Onda corta)

Agustín Laguarda
laguarda@fing.edu.uy

Universidad de la República

2023



- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple
- 3 ETR con dispersión múltiple
 - Método de los dos flujos
- 4 Casos particulares
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similitud

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y
 - a la ganancia por emisión térmica

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y
 - a la ganancia por emisión térmica
- Esto sucede en el IRT y MW si no hay precipitación.

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se dirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y
 - a la ganancia por emisión térmica
- Esto sucede en el IRT y MW si no hay precipitación.
- También se puede utilizar para estudiar la radiación solar directa

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y
 - a la ganancia por emisión térmica
- Esto sucede en el IRT y MW si no hay precipitación.
- También se puede utilizar para estudiar la radiación solar directa

¿Cuándo es necesario considerar la dispersión?

Cuando la radiación es extinguida por dispersión, la energía se redirige en otras direcciones. La pérdida de energía en una dirección implica aportes en otras direcciones. Esto complejiza los cálculos de TR.

¿Cuándo se puede ignorar?

- La dispersión se puede ignorar como fuente cuando su contribución en una dirección es despreciables con respecto
 - a la extinción total y
 - a la ganancia por emisión térmica
- Esto sucede en el IRT y MW si no hay precipitación.
- También se puede utilizar para estudiar la radiación solar directa

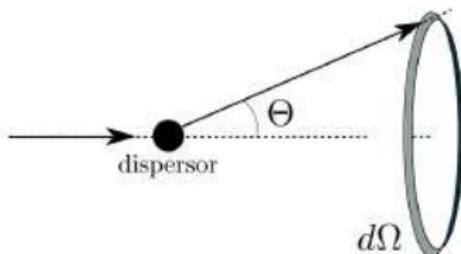
En problemas que involucren onda corta en la atmósfera (ultravioleta, visible, infrarrojo cercano), la dispersión es la fuente dominante de radiación para direcciones que no involucren la dirección del Sol.

- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .

¹ $\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ , μ' y $(\varphi' - \varphi)$

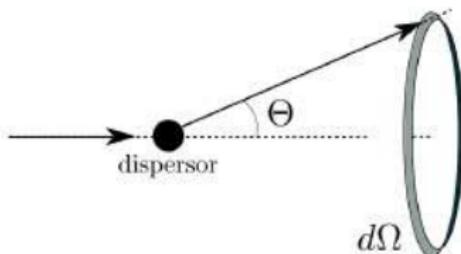
Función de fase

- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .
- Consideramos que el "elemento dispersor" está compuesto por numerosas partículas orientadas de forma aleatoria, por lo que la probabilidad de ser dispersado en la dirección \hat{u} solo depende del ángulo Θ , que verifica $\cos \Theta \equiv \hat{u}' \cdot \hat{u}$ ⁽¹⁾.



¹ $\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ , μ' y $(\varphi' - \varphi)$

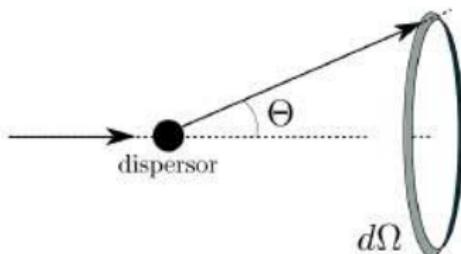
- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .
- Consideramos que el "elemento dispersor" está compuesto por numerosas partículas orientadas de forma aleatoria, por lo que la probabilidad de ser dispersado en la dirección \hat{u} solo depende del ángulo Θ , que verifica $\cos \Theta \equiv \hat{u}' \cdot \hat{u}$ ⁽¹⁾.



- Se reduce el problema de $p(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ a $p(\cos \Theta)$.

¹ $\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ, μ' y $(\varphi' - \varphi)$

- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .
- Consideramos que el "elemento dispersor" está compuesto por numerosas partículas orientadas de forma aleatoria, por lo que la probabilidad de ser dispersado en la dirección \hat{u} solo depende del ángulo Θ , que verifica $\cos \Theta \equiv \hat{u}' \cdot \hat{u}$ ⁽¹⁾.

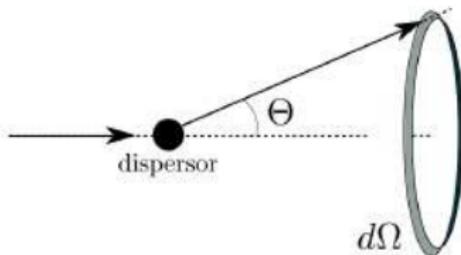


- Se reduce el problema de $p(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ a $p(\cos \Theta)$.
- La condición de normalización queda expresada como

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\cos \Theta) d \cos \Theta = 1$$

¹ $\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ, μ' y $(\varphi' - \varphi)$

- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .
- Consideramos que el "elemento dispersor" está compuesto por numerosas partículas orientadas de forma aleatoria, por lo que la probabilidad de ser dispersado en la dirección \hat{u} solo depende del ángulo Θ , que verifica $\cos \Theta \equiv \hat{u}' \cdot \hat{u}$ ⁽¹⁾.



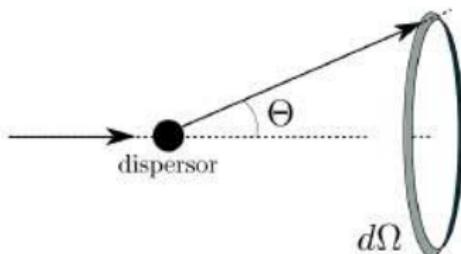
- Se reduce el problema de $p(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ a $p(\cos \Theta)$.
- La condición de normalización queda expresada como

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\cos \Theta) d \cos \Theta = 1$$

¹ $\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ, μ' y $(\varphi' - \varphi)$

Función de fase

- Ya definimos la función de fase, p , como la probabilidad de que un fotón proveniente desde una dirección definida por \hat{u}' sea dispersado en la dirección \hat{u} .
- Consideramos que el "elemento dispersor" está compuesto por numerosas partículas orientadas de forma aleatoria, por lo que la probabilidad de ser dispersado en la dirección \hat{u} solo depende del ángulo Θ , que verifica $\cos \Theta \equiv \hat{u}' \cdot \hat{u}$ ⁽¹⁾.



- Se reduce el problema de $p(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ a $p(\cos \Theta)$.
- La condición de normalización queda expresada como

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\cos \Theta) d \cos \Theta = 1$$

Hipótesis falla para cristales de hielo, copos de nieve y gotas de lluvia.

¹ $\cos \Theta = \mu \mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi)$. Queda determinado por μ , μ' y $(\varphi' - \varphi)$

Función de fase

Parámetro de asimetría

- Se define el parámetro de asimetría como

$$g \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega, \quad (1)$$

donde la integral es en todo el ángulo sólido de diferencial $d\omega$.

Función de fase

Parámetro de asimetría

- Se define el parámetro de asimetría como

$$g \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega, \quad (1)$$

donde la integral es en todo el ángulo sólido de diferencial $d\omega$.

- $g \in [-1, 1]$ y se interpreta como el $\cos \Theta$ promedio de dispersión

Función de fase

Parámetro de asimetría

- Se define el parámetro de asimetría como

$$g \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega, \quad (1)$$

donde la integral es en todo el ángulo sólido de diferencial $d\omega$.

- $g \in [-1, 1]$ y se interpreta como el $\cos \Theta$ promedio de dispersión
- Para el caso de radiación solar, nubes y gotas de agua presentan g positivos y grandes.

Función de fase

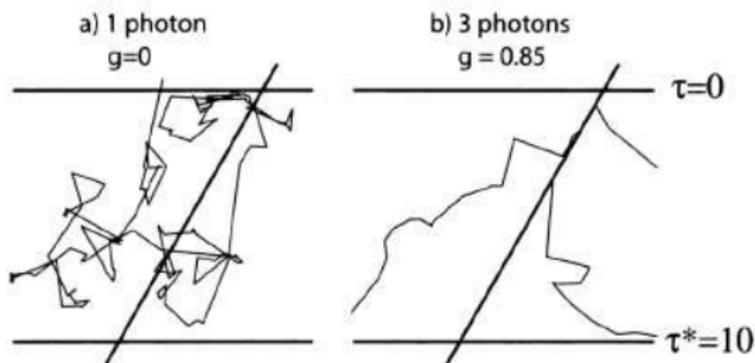
Parámetro de asimetría

- Se define el parámetro de asimetría como

$$g \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega, \quad (1)$$

donde la integral es en todo el ángulo sólido de diferencial $d\omega$.

- $g \in [-1, 1]$ y se interpreta como el $\cos \Theta$ promedio de dispersión
- Para el caso de radiación solar, nubes y gotas de agua presentan g positivos y grandes.



Función de fase

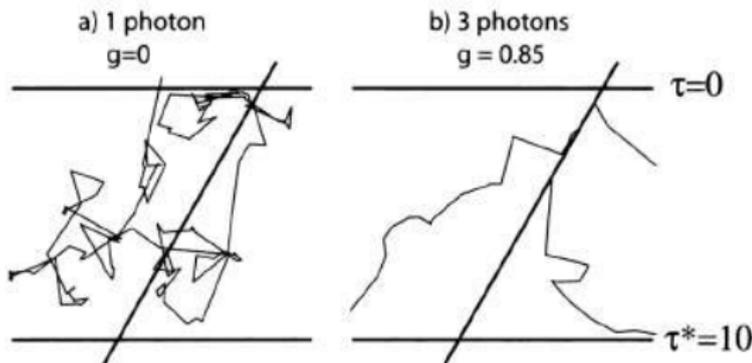
Parámetro de asimetría

- Se define el parámetro de asimetría como

$$g \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega, \quad (1)$$

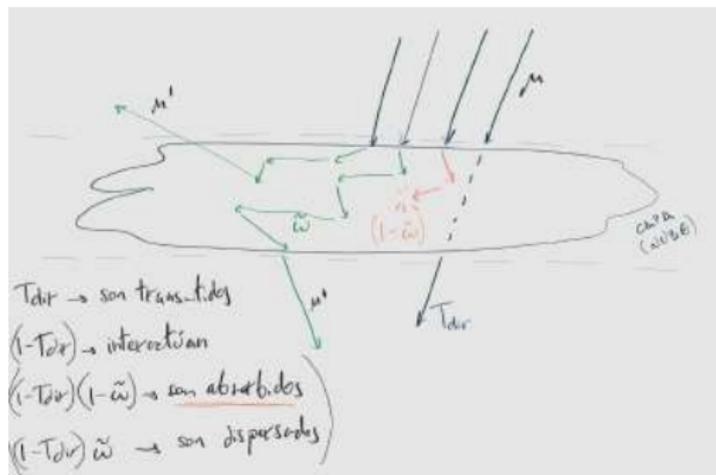
donde la integral es en todo el ángulo sólido de diferencial $d\omega$.

- $g \in [-1, 1]$ y se interpreta como el $\cos \Theta$ promedio de dispersión
- Para el caso de radiación solar, nubes y gotas de agua presentan g positivos y grandes.

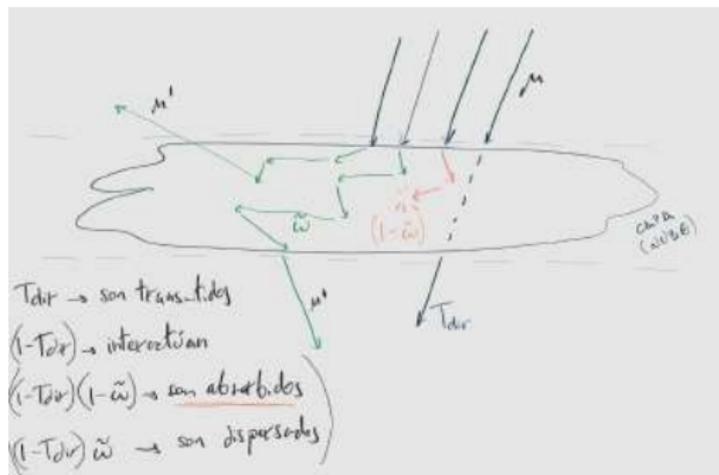


- Func. de fase realistas son complicadas. En algunos cálculos se utilizan modelos simplificados que mantienen en factor de simetría como la función de Henyey-Greenstein (ver clase anterior)

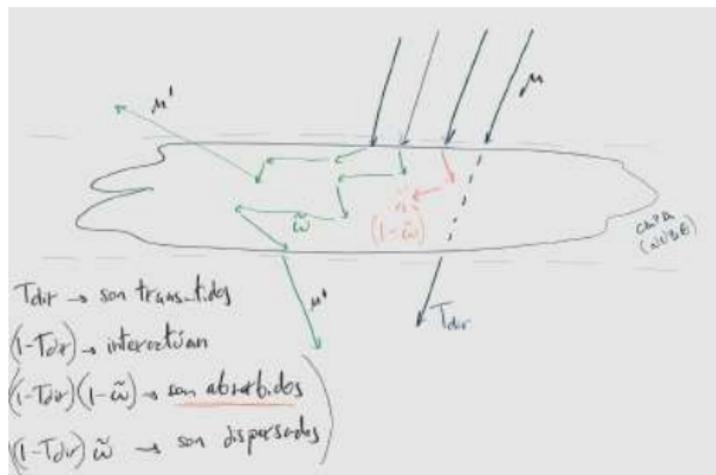
- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple
- 3 ETR con dispersión múltiple
 - Método de los dos flujos
- 4 Casos particulares
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similitud



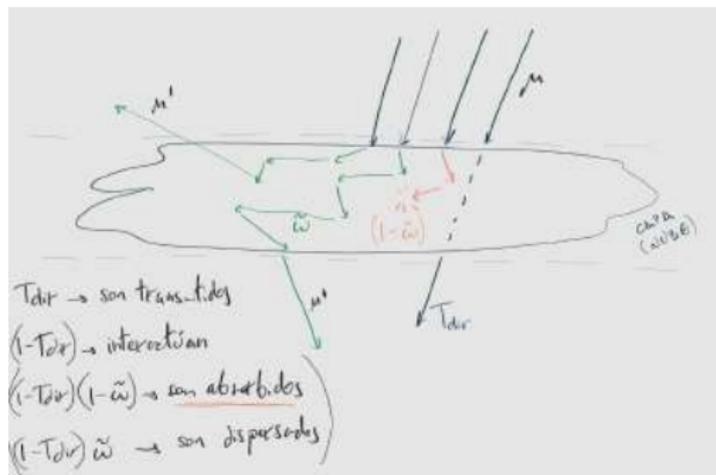
- Para un haz en cierta dirección, una porción $T_{dir} = e^{-\tau^*/\mu}$ es transmitida de forma directa.



- Para un haz en cierta dirección, una porción $T_{dir} = e^{-\tau^*/\mu}$ es transmitida de forma directa.
- Del resto, una porción $(1 - \tilde{\omega})$ es absorbida. Recordar que el albedo de dispersión simple es $\tilde{\omega} \equiv \frac{\beta_s}{\beta_e}$.



- Para un haz en cierta dirección, una porción $T_{dir} = e^{-\tau^*/\mu}$ es transmitida de forma directa.
- Del resto, una porción $(1 - \tilde{\omega})$ es absorbida. Recordar que el albedo de dispersión simple es $\tilde{\omega} \equiv \frac{\beta_s}{\beta_e}$.
- El remanente se dispersa una o más veces.



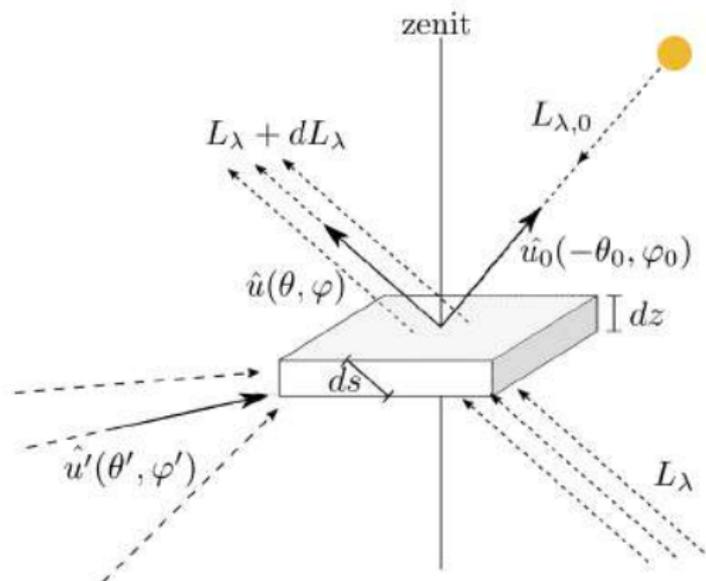
- Para un haz en cierta dirección, una porción $T_{dir} = e^{-\tau^*/\mu}$ es transmitida de forma directa.
- Del resto, una porción $(1 - \tilde{\omega})$ es absorbida. Recordar que el albedo de dispersión simple es $\tilde{\omega} \equiv \frac{\beta_s}{\beta_e}$.
- El remanente se dispersa una o más veces.
- Si escapa por la parte superior de la capa contribuye al albedo, si escapa por la parte de abajo, contribuye a la *transmitancia difusa*.

Cuando un fotón ingresa en una capa de la atmósfera, será absorbido o saldrá de la capa habiendo sufrido algún proceso de dispersión (0, 1 o más veces). Si atraviesa la capa sin ser alterado ha sido *transmitido*. La probabilidad de que esto le ocurra a cierto fotón es la transmitancia directa. Si el fotón es dispersado, aportará a la *transmitancia difusa* o al albedo de la capa estudiada.

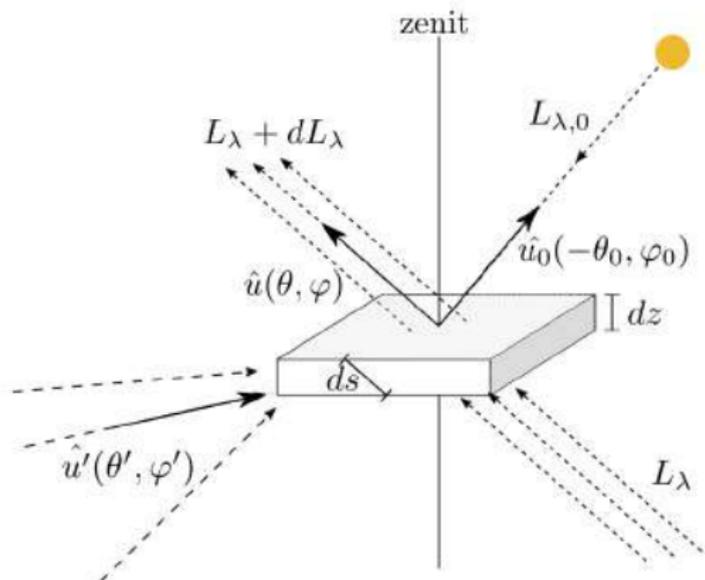
Para una capa o región de la atmósfera se distinguen dos casos:

- **Dispersión simple.** Es cuando la mayoría de la transmitancia difusa y el albedo están dominados por fotones que han sido dispersados una única vez.
Ocurre cuando la profundidad óptica es baja ($\tau \ll 1$) o el medio es muy absorbente ($\tilde{\omega} \ll 1$).
Ejemplo: Cielo sin nubes para espectro de onda corta (excepto UV y azul).
- **Dispersión múltiple.** Ocurre cuando $\tau > 1$ y el medio es muy dispersivo ($\tilde{\omega}$ cercano a 1).
Ejemplo: nubes espesas.

Caso general: balance en un diferencial de volumen

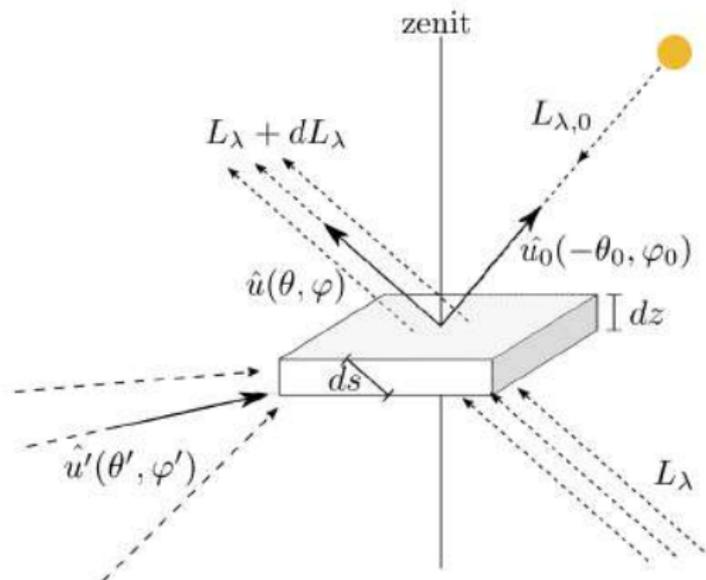


Caso general: balance en un diferencial de volumen



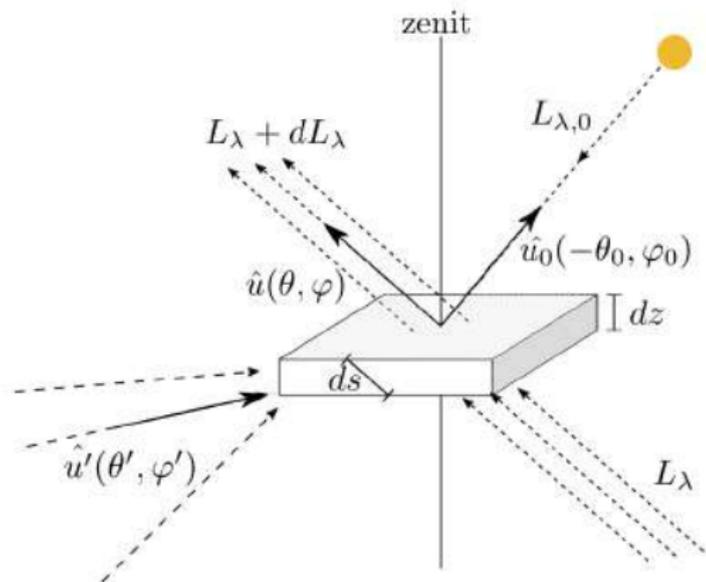
- reducción por extinción (absorción y dispersión en otras direcciones)

Caso general: balance en un diferencial de volumen



- reducción por extinción (absorción y dispersión en otras direcciones)
- incremento por la dispersión simple de la radiación **directa** desde la dirección $(-\mu_0, \varphi_0)$ hacia (μ, φ)

Caso general: balance en un diferencial de volumen



- reducción por extinción (absorción y dispersión en otras direcciones)
- incremento por la dispersión simple de la radiación **directa** desde la dirección $(-\mu_0, \varphi_0)$ hacia (μ, φ)
- incremento por dispersión múltiple de la radiación **difusa** desde todas las direcciones (μ', φ') hacia la dirección de interés

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- La función fuente queda expresada en términos genéricos como

$$J(\mu, \varphi) = (1 - \tilde{\omega})B(T) + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (2)$$

donde p es la función de fase y $\tilde{\omega}$ es el albedo de dispersión simple.

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- La función fuente queda expresada en términos genéricos como

$$J(\mu, \varphi) = (1 - \tilde{\omega})B(T) + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (2)$$

donde p es la función de fase y $\tilde{\omega}$ es el albedo de dispersión simple.

- El último término comprende las radiancias dispersadas desde la directa y desde la difusa.

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- La función fuente queda expresada en términos genéricos como

$$J(\mu, \varphi) = (1 - \tilde{\omega})B(T) + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (2)$$

donde p es la función de fase y $\tilde{\omega}$ es el albedo de dispersión simple.

- El último término comprende las radiancias dispersadas desde la directa y desde la difusa.
- Hay pocos los casos donde se considera dispersión y emisión en simultáneo.
Ejemplos:

En esta parte consideraremos únicamente la dispersión.

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- La función fuente queda expresada en términos genéricos como

$$J(\mu, \varphi) = (1 - \tilde{\omega})B(T) + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (2)$$

donde p es la función de fase y $\tilde{\omega}$ es el albedo de dispersión simple.

- El último término comprende las radiancias dispersadas desde la directa y desde la difusa.
- Hay pocos los casos donde se considera dispersión y emisión en simultáneo.
Ejemplos:
 - sensado remoto de precipitaciones utilizando rango de microondas

En esta parte consideraremos únicamente la dispersión.

- Considerando la hipótesis de planos paralelos tenemos

$$\frac{\mu}{\beta_e} \frac{dI_\lambda}{dz} = -I_\lambda + J_\lambda,$$

donde la función fuente, J , comprende en términos generales la emisión del medio y la radiancia dispersada desde otras direcciones hacia la dirección de estudio.

- La función fuente queda expresada en términos genéricos como

$$J(\mu, \varphi) = (1 - \tilde{\omega})B(T) + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (2)$$

donde p es la función de fase y $\tilde{\omega}$ es el albedo de dispersión simple.

- El último término comprende las radiancias dispersadas desde la directa y desde la difusa.
- Hay pocos los casos donde se considera dispersión y emisión en simultáneo.
Ejemplos:
 - sensado remoto de precipitaciones utilizando rango de microondas
 - sensado remoto de nubes en $4\mu\text{m}$.

En esta parte consideraremos únicamente la dispersión.

Recordemos que la *radiancia monocromática solar directa* se puede expresar en una dirección arbitraria como

$$I_b(\varphi', \mu') = F_0 \delta(\varphi' - \varphi_0) \delta(\mu' - \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right), \quad (3)$$

donde F_0 es la irradiancia solar TOA (corregida por la distancia T-S), δ es la Delta de Dirac, el subíndice "b" es por *beam* y el subíndice "o" denota la dirección del Sol.

Las expresiones de la densidad de flujo (en W/m^2) se pueden expresar en términos de la radiación difusa y la directa (omitiendo la emisión térmica);

$$F^\uparrow = F_{dif}^\uparrow = 2\pi \int_0^1 I_d(\tau, \mu) \mu d\mu,$$

$$F^\downarrow = F_{dif}^\downarrow + F_{dir}^\downarrow = 2\pi \int_0^{-1} I_d(\tau, \mu) \mu d\mu + \mu_0 F_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

Por último el flujo neto (monocromático) sobre una superficie horizontal es

$$F_{neto}(\tau) = F^\downarrow - F^\uparrow.$$

Densidad de flujo de onda corta

Recordemos que la *radiancia monocromática solar directa* se puede expresar en una dirección arbitraria como

$$I_b(\varphi', \mu') = F_0 \delta(\varphi' - \varphi_0) \delta(\mu' - \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right), \quad (3)$$

donde F_0 es la irradiancia solar TOA (corregida por la distancia T-S), δ es la Delta de Dirac, el subíndice "b" es por *beam* y el subíndice "o" denota la dirección del Sol.

Las expresiones de la densidad de flujo (en W/m^2) se pueden expresar en términos de la radiación difusa y la directa (omitiendo la emisión térmica);

$$F^\uparrow = F_{dif}^\uparrow = 2\pi \int_0^1 I_d(\tau, \mu) \mu d\mu,$$

$$F^\downarrow = F_{dif}^\downarrow + F_{dir}^\downarrow = 2\pi \int_0^{-1} I_d(\tau, \mu) \mu d\mu + \mu_0 F_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

Por último el flujo neto (monocromático) sobre una superficie horizontal es

$$F_{neto}(\tau) = F^\downarrow - F^\uparrow.$$

De aquí en más nos dedicaremos a estudiar la radiación difusa

- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple**
- 3 ETR con dispersión múltiple
 - Método de los dos flujos
- 4 Casos particulares
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similitud

Hipótesis

Toda la difusa es producto de la dispersión desde el haz de luz directa (dispersión simple).

Si consideramos la ecuación 3 , la ecuación 2 queda como

$$J(\mu, \varphi) \simeq \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} \rho(\cos \Theta) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right), \quad (4)$$

donde Θ es el ángulo entre la dirección del Sol y la dirección de estudio y se omitió la emisión térmica)

Hipótesis

Toda la difusa es producto de la dispersión desde el haz de luz directa (dispersión simple).

Si consideramos la ecuación 3 , la ecuación 2 queda como

$$J(\mu, \varphi) \simeq \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} \rho(\cos \Theta) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right), \quad (4)$$

donde Θ es el ángulo entre la dirección del Sol y la dirección de estudio y se omitió la emisión térmica)

Ya vimos (Tema 3) que la solución general para haces que suben hasta TOA

$$I_\lambda(0, \mu, \varphi) = I_\lambda(\tau^*, \mu, \varphi) e^{-\tau^*/\mu} + \int_0^{\tau^*} J_\lambda(\tau', \mu, \varphi) \frac{e^{-\tau'/\mu}}{\mu} d\tau'$$

entonces...

Tenemos la solución:

$$I(0, \mu, \varphi) = I(\tau^*, \mu, \varphi) e^{-\tau^*/\mu} + \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} p(\Theta) \int_0^{\tau^*} \exp \left[- \left(\frac{\tau'}{\mu_0} + \frac{\tau'}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\mu} d\tau',$$

Tenemos la solución:

$$I(0, \mu, \varphi) = I(\tau^*, \mu, \varphi) e^{-\tau^*/\mu} + \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} p(\Theta) \int_0^{\tau^*} \exp \left[- \left(\frac{\tau'}{\mu_0} + \frac{\tau'}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\mu} d\tau',$$

Asumiendo que el primer término es nulo (superficie oscura), la radiancia en el tope de la atmósfera es

$$I(0, \mu, \varphi) = \frac{F_0 \tilde{\omega} \mu_0}{4\pi(\mu + \mu_0)} p(\Theta) \left[1 - \exp \left[-\tau^* \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \right) \right] \right]$$

Tenemos la solución:

$$I(0, \mu, \varphi) = I(\tau^*, \mu, \varphi) e^{-\tau^*/\mu} + \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} \rho(\Theta) \int_0^{\tau^*} \exp \left[- \left(\frac{\tau'}{\mu_0} + \frac{\tau'}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\mu} d\tau',$$

Asumiendo que el primer término es nulo (superficie oscura), la radiancia en el tope de la atmósfera es

$$I(0, \mu, \varphi) = \frac{F_0 \tilde{\omega} \mu_0}{4\pi(\mu + \mu_0)} \rho(\Theta) \left[1 - \exp \left[-\tau^* \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \right) \right] \right]$$

En este caso, es razonable considerar que el argumento de la exponencial es pequeño (ángulos no muy oblicuos y $\tau^* \ll 1$), entonces

$$I(0, \mu, \varphi) \simeq \frac{F_0 \tilde{\omega} \tau^*}{4\pi\mu} \rho(\cos \Theta)$$

El resultado es análogo para radiancia la incidente en superficie $I(\tau^*, \mu, \varphi)$ (sin dem.)

Tenemos la solución:

$$I(0, \mu, \varphi) = I(\tau^*, \mu, \varphi) e^{-\tau^*/\mu} + \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4\pi} \rho(\Theta) \int_0^{\tau^*} \exp \left[- \left(\frac{\tau'}{\mu_0} + \frac{\tau'}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\mu} d\tau',$$

Asumiendo que el primer término es nulo (superficie oscura), la radiancia en el tope de la atmósfera es

$$I(0, \mu, \varphi) = \frac{F_0 \tilde{\omega} \mu_0}{4\pi(\mu + \mu_0)} \rho(\Theta) \left[1 - \exp \left[-\tau^* \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \right) \right] \right]$$

En este caso, es razonable considerar que el argumento de la exponencial es pequeño (ángulos no muy oblicuos y $\tau^* \ll 1$), entonces

$$I(0, \mu, \varphi) \simeq \frac{F_0 \tilde{\omega} \tau^*}{4\pi\mu} \rho(\cos \Theta)$$

El resultado es análogo para radiancia la incidente en superficie $I(\tau^*, \mu, \varphi)$ (sin dem.)

Reflectancia bidireccional

$$R(\mu, \varphi, \mu_0, \varphi_0) = \frac{\pi I(0, \mu, \varphi)}{\mu_0 F_0} = \tau^* \frac{\tilde{\omega}}{4\mu\mu_0} \rho(\cos \Theta)$$

Esta cantidad es de gran importancia en la medición de aerosoles a través de imágenes satelitales

- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple
- 3 ETR con dispersión múltiple**
 - Método de los dos flujos
- 4 Casos particulares
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similitud

En el rango de onda corta, las nubes de agua son ópticamente espesas ($\tau \gg 1$) y poco absorbentes ($\tilde{\omega} \simeq 1$), por lo que el *scattering* múltiple no puede despreciarse.

En el rango de onda corta, las nubes de agua son ópticamente espesas ($\tau \gg 1$) y poco absorbentes ($\tilde{\omega} \simeq 1$), por lo que el *scattering* múltiple no puede despreciarse.

La ETR es de forma integro-diferencial:

$$\mu \frac{dI(\mu, \varphi)}{d\tau} = I(\mu, \varphi) - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi',$$

- Para resolver $I(\mu, \varphi)$ en cierto nivel (τ), hay que determinar para todas las direcciones $I(\mu', \varphi')$ y todos los niveles.
- En general esto es posible analíticamente bajo fuertes hipótesis (no -realistas) o de forma computacional.

Caso general

En el caso general para la radiación de onda corta, en la ETR se pueden explicitar las contribuciones de las dispersiones simple y múltiple:

$$\mu \frac{dI(\mu, \varphi)}{d\tau} = I(\mu, \varphi) - \frac{\tilde{\omega} F_0}{4\pi} p(\mu, \varphi, -\mu_0, \varphi_0) e^{-\tau/\mu_0} - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi',$$

Caso general

En el caso general para la radiación de onda corta, en la ETR se pueden explicitar las contribuciones de las dispersiones simple y múltiple:

$$\mu \frac{dI(\mu, \varphi)}{d\tau} = I(\mu, \varphi) - \frac{\tilde{\omega} F_0}{4\pi} p(\mu, \varphi, -\mu_0, \varphi_0) e^{-\tau/\mu_0} - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi',$$

Cuando el objetivo es obtener los flujos, se trabaja con el **promedio azimutal** de la ETR sin gran pérdida de precisión.

Caso general

En el caso general para la radiación de onda corta, en la ETR se pueden explicitar las contribuciones de las dispersiones simple y múltiple:

$$\mu \frac{dI(\mu, \varphi)}{d\tau} = I(\mu, \varphi) - \frac{\tilde{\omega} F_0}{4\pi} \rho(\mu, \varphi, -\mu_0, \varphi_0) e^{-\tau/\mu_0} - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi') d\mu' d\varphi',$$

Cuando el objetivo es obtener los flujos, se trabaja con el **promedio azimutal** de la ETR sin gran pérdida de precisión.

Promedio azimutal de la ETR

Definimos la radiancia promediada:

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\mu, \varphi) d\varphi,$$

y el promedio azimutal de la función de fase:

$$\rho(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\mu, \mu', \Delta\varphi) d(\Delta\varphi),$$

donde $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$. Entonces tenemos

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \tilde{\omega} F_0 e^{-\tau/\mu_0} \frac{\rho(\mu, -\mu_0)}{2} - \tilde{\omega} \int_{-1}^1 I(\mu') \frac{\rho(\mu, \mu')}{2} d\mu'. \quad (5)$$

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.
- Métodos aproximados.

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.
- Métodos aproximados.
 - Aproximación de Eddington o de dos flujos

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.
- Métodos aproximados.
 - Aproximación de Eddington o de dos flujos
 - Ajuste de la función Delta y principios de similaridad

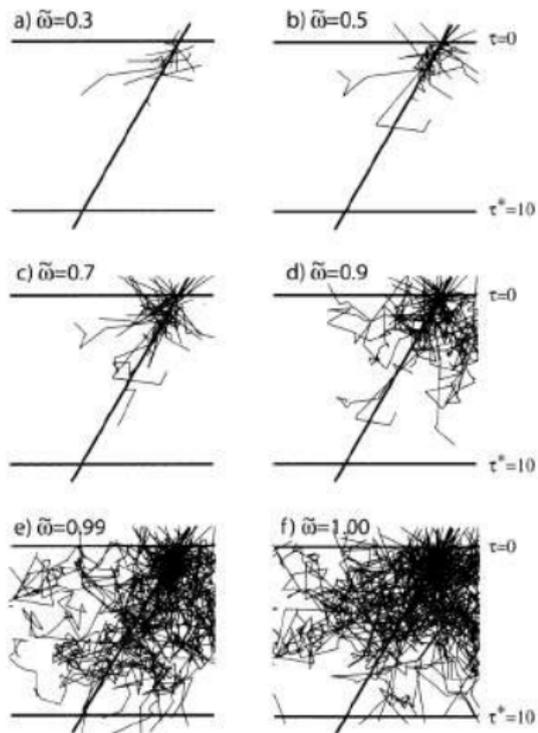
- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.
- Métodos aproximados.
 - Aproximación de Eddington o de dos flujos
 - Ajuste de la función Delta y principios de similaridad

- Método de Monte-Carlo.
Se simulan trayectorias de fotones. Alto costo computacional
- Método de ordenadas discretas
Se discretiza la ecuación general en una suma de varios términos (desarrollo de Legendre, o cuadratura de Gauss, por ejemplo) y se buscan soluciones al sistema lineal de ecuaciones diferenciales
- Métodos de adición.
Se plantean soluciones al flujo para cada diferencial de capa de la atmósfera y se van agregando capas.
- Métodos aproximados.
 - Aproximación de Eddington o de dos flujos
 - Ajuste de la función Delta y principios de similaridad

Aquí veremos una versión básica del modelo de los dos flujos específicamente para la radiación difusa. Para profundizar en estos temas ver el Capítulo 6 del Liou y el Capítulo 4 del Zdunkowsky.

Dispersión múltiple

Monte-Carlo

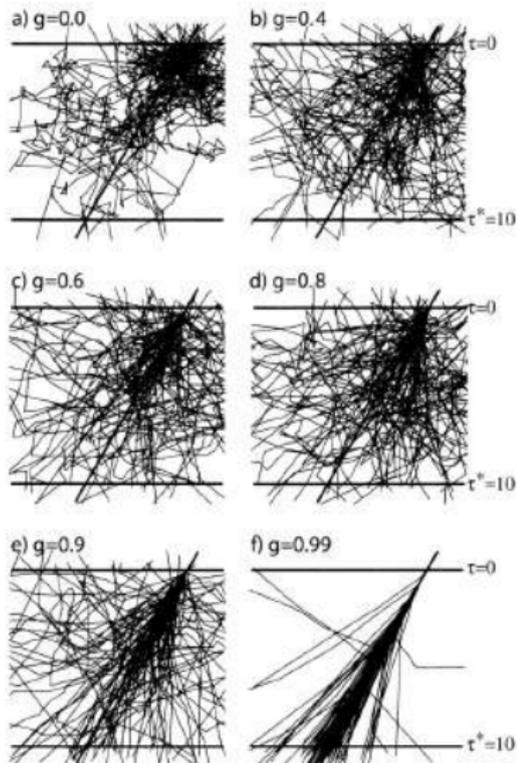


100 fotones, con dispersión isotrópica ($g=0$) y *single scattering albedo* variable

Figure: Petty. Fig. 13.1

Dispersión múltiple

Monte-Carlo



100 fotones, con diferente factor de simetría y *single scattering albedo* igual a 1 (conservativo)

Figure: Petty. Fig. 13.2

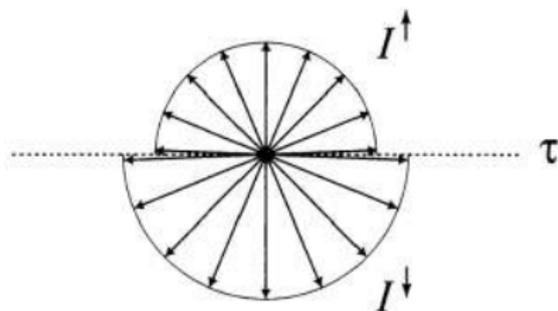
Método de los dos flujos

Existen variantes del método de los dos flujos (Ver Zdunkowsy Cap 6). A partir de diferentes hipótesis, se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas para la densidades de flujo "hacia arriba" y "hacia abajo".

Hipótesis:

La intensidad es aproximadamente constante en cada hemisferio:

$$I(\mu) = \begin{cases} I^\uparrow & \text{si } \mu > 0 \\ I^\downarrow & \text{si } \mu \leq 0 \end{cases}$$



Observación

El método de dos flujos puede entenderse como un caso particular de una solución de ordenadas discretas donde la dispersión múltiple se discretiza utilizando la cuadratura de Gauss y expande la expresión de la función de fase en polinomios de Legendre hasta orden 2.

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu'$$

Método de dos flujos

Solución

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu'$$

si $\mu > 0$,

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_0^1 I^\uparrow p(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^0 I^\downarrow p(\mu, \mu') d\mu'$$

Método de dos flujos

Solución

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu'$$

si $\mu > 0$,

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_0^1 I^\uparrow p(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^0 I^\downarrow p(\mu, \mu') d\mu'$$

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left[\int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' \right] I^\uparrow - \frac{\tilde{\omega}}{2} \left[\int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' \right] I^\downarrow$$

Definimos la fracción **retro-dispersada** como:

$$b(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' & \text{si } \mu > 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

Definimos la fracción **retro-dispersada** como:

$$b(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' & \text{si } \mu > 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

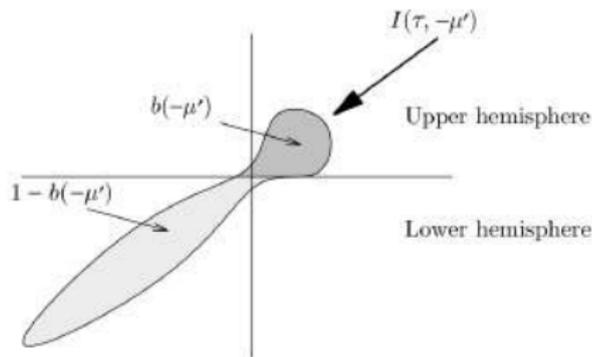


Fig. 6.1 Illustration of the backscattered fraction $b(-\mu')$ in the phase function.

Figure: Zdunkowski-2007

Entonces:

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}[1 - b(\mu)] I^\uparrow - \tilde{\omega} b(\mu) I^\downarrow$$

Para eliminar la dependencia en μ , integramos toda esta última expresión entre $\int_0^1 d\mu$, obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}[1 - \bar{b}] I^\uparrow - \tilde{\omega} \bar{b} I^\downarrow,$$

donde

$$\bar{b} \equiv \int_0^1 b(\mu) d\mu$$

Reordenando la expresión anterior tenemos:

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow)},$$

Operando de forma similar para intensidades con $\mu < 0$...

Ecuaciones de dos flujos para la incidencia difusa:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow),$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\downarrow - \tilde{\omega} \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow),$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver para hallar $I^\uparrow(\tau)$ y $I^\downarrow(\tau)$ en función de los parámetros $\tilde{\omega}$ y \bar{b} (que asumimos constantes), y de las condiciones de borde.

Ecuaciones de dos flujos para la incidencia difusa:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow),$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\downarrow - \tilde{\omega} \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow),$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver para hallar $I^\uparrow(\tau)$ y $I^\downarrow(\tau)$ en función de los parámetros $\tilde{\omega}$ y \bar{b} (que asumimos constantes), y de las condiciones de borde.

Hipótesis adicional

Hay una relación entre \bar{b} y g .

En particular si $g = 1 \Rightarrow \bar{b} = 0$, si $g = 0 \Rightarrow \bar{b} = 1/2$ y si $g = -1 \Rightarrow \bar{b} = 1$.

Asumimos que su relación es lineal;

$$\bar{b} = \frac{1 - g}{2}$$

Método de dos flujos

Solución

Reescribimos las ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow), \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\downarrow - \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow). \quad (7)$$

Método de dos flujos

Solución

Reescribimos las ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow), \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\downarrow - \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow). \quad (7)$$

Sumando y restando las ecuaciones 6 y 7 tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d(I^\uparrow - I^\downarrow)}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(I^\uparrow + I^\downarrow)}{d\tau} = (1 - g\tilde{\omega})(I^\uparrow - I^\downarrow) \quad (9)$$

Reescribimos las ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\uparrow + \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow), \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}) I^\downarrow - \tilde{\omega} \frac{1-g}{2} (I^\uparrow - I^\downarrow). \quad (7)$$

Sumando y restando las ecuaciones 6 y 7 tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d(I^\uparrow - I^\downarrow)}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(I^\uparrow + I^\downarrow)}{d\tau} = (1 - g\tilde{\omega})(I^\uparrow - I^\downarrow) \quad (9)$$

Derivando 8 y sustituyendo 9 (y viceversa) tenemos

$$\frac{d^2(I^\uparrow - I^\downarrow)}{d\tau^2} = 4(1 - g\tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow - I^\downarrow) \quad (10)$$

$$\frac{d^2(I^\uparrow + I^\downarrow)}{d\tau^2} = 4(1 - g\tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) \quad (11)$$

El método de dos flujos

Solución

Las ecuaciones 10 y 11 se pueden expresar como

$$\frac{d^2 M}{d\tau^2} = \Gamma^2 M, \quad (12)$$

siendo $M = (I^\uparrow + I^\downarrow)$ o $M = (I^\uparrow - I^\downarrow)$ y $\Gamma = 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}\sqrt{1 - \tilde{\omega}}}$. Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene como solución combinaciones lineales de exponenciales en $\pm\Gamma\tau$.

El método de dos flujos

Solución

Las ecuaciones 10 y 11 se pueden expresar como

$$\frac{d^2 M}{d\tau^2} = \Gamma^2 M, \quad (12)$$

siendo $M = (I^\uparrow + I^\downarrow)$ o $M = (I^\uparrow - I^\downarrow)$ y $\Gamma = 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}\sqrt{1 - \tilde{\omega}}}$. Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene como solución combinaciones lineales de exponenciales en $\pm\Gamma\tau$. De forma equivalente:

$$I^\uparrow(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Be^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = Ce^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

Las constantes A, B, C y D dependerán de las condiciones de borde, pero no son independientes.

El método de dos flujos

Solución

Las ecuaciones 10 y 11 se pueden expresar como

$$\frac{d^2 M}{d\tau^2} = \Gamma^2 M, \quad (12)$$

siendo $M = (I^\uparrow + I^\downarrow)$ o $M = (I^\uparrow - I^\downarrow)$ y $\Gamma = 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}\sqrt{1 - \tilde{\omega}}}$. Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene como solución combinaciones lineales de exponenciales en $\pm\Gamma\tau$. De forma equivalente:

$$I^\uparrow(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Be^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = Ce^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

Las constantes A, B, C y D dependerán de las condiciones de borde, pero no son independientes. De forma de que se verifiquen las ecuaciones 6 y 7, se tiene que (sin dem.)

$$\frac{C}{A} = \frac{B}{D} = \frac{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}} \equiv r_\infty$$

Donde r_∞ se puede interpretar como el albedo en el tope de nube.

El método de dos flujos

Solución

Las ecuaciones 10 y 11 se pueden expresar como

$$\frac{d^2 M}{d\tau^2} = \Gamma^2 M, \quad (12)$$

siendo $M = (I^\uparrow + I^\downarrow)$ o $M = (I^\uparrow - I^\downarrow)$ y $\Gamma = 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}\sqrt{1 - \tilde{\omega}}}$. Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene como solución combinaciones lineales de exponenciales en $\pm\Gamma\tau$. De forma equivalente:

$$I^\uparrow(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Be^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = Ce^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

Las constantes A, B, C y D dependerán de las condiciones de borde, pero no son independientes. De forma de que se verifiquen las ecuaciones 6 y 7, se tiene que (sin dem.)

$$\frac{C}{A} = \frac{B}{D} = \frac{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}} \equiv r_\infty$$

Donde r_∞ se puede interpretar como el albedo en el tope de nube. En resumen

$$I^\uparrow(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Dr_\infty e^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = Ar_\infty e^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)
- Este resultado sólo involucra la **radiación difusa**

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)
- Este resultado sólo involucra la **radiación difusa**
- El resultado requiere ($\tilde{\omega} < 1$). En caso de nubes conservativas hay buscar otra solución.

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)
- Este resultado sólo involucra la **radiación difusa**
- El resultado requiere ($\tilde{\omega} < 1$). En caso de nubes conservativas hay buscar otra solución.
- En el desarrollo mostrado el aporte de las dispersiones simple y múltiple no es discriminado. Un desarrollo más preciso puede realizarse teniendo esta diferencia en cuenta.

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)
- Este resultado sólo involucra la **radiación difusa**
- El resultado requiere ($\tilde{\omega} < 1$). En caso de nubes conservativas hay buscar otra solución.
- En el desarrollo mostrado el aporte de las dispersiones simple y múltiple no es discriminado. Un desarrollo más preciso puede realizarse teniendo esta diferencia en cuenta.
- Los métodos de dos flujos pueden "corregirse" para captar mejor algunas propiedades que de otra forma se atenúan, como el efecto de un *forward scattering* dominante

Algunos comentarios

- Este desarrollo es un caso del modelo de dos flujos, pero no el único.
- Diferentes hipótesis pueden llevar a resultados similares (pero diferentes)
- Este resultado sólo involucra la **radiación difusa**
- El resultado requiere ($\tilde{\omega} < 1$). En caso de nubes conservativas hay buscar otra solución.
- En el desarrollo mostrado el aporte de las dispersiones simple y múltiple no es discriminado. Un desarrollo más preciso puede realizarse teniendo esta diferencia en cuenta.
- Los métodos de dos flujos pueden "corregirse" para captar mejor algunas propiedades que de otra forma se atenúan, como el efecto de un *forward scattering* dominante
- Veremos algunas aplicaciones con la solución que desarrollamos...

El método de dos flujos

Solución - Condiciones de borde

Para resolver las ecuaciones:

$$I^{\uparrow}(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Dr_{\infty}e^{-\Gamma\tau}$$

$$I^{\downarrow}(\tau) = Ar_{\infty}e^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

hace falta conocer las condiciones de borde.

Por ejemplo: Radiancia conocida en el tope de nube y borde inferior completamente absorbente;

$$I^{\downarrow}(0) = I_0 \qquad I^{\uparrow}(\tau^*) = 0$$

En este caso:

$$I^{\uparrow}(\tau) = \frac{r_{\infty}I_0}{e^{\Gamma\tau^*} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma\tau^*}} \left[e^{\Gamma(\tau^* - \tau)} - e^{-\Gamma(\tau^* - \tau)} \right]$$

$$I^{\downarrow}(\tau) = \frac{I_0}{e^{\Gamma\tau^*} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma\tau^*}} \left[e^{\Gamma(\tau^* - \tau)} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma(\tau^* - \tau)} \right]$$

Definiciones para el flujo:

transmitancia:
$$T = \frac{\pi I^\downarrow(\tau^*)}{\pi I^\downarrow(0)}$$

albedo:
$$R = \frac{\pi I^\uparrow(0)}{\pi I^\downarrow(0)}$$

absortancia:
$$A = 1 - (R + T)$$

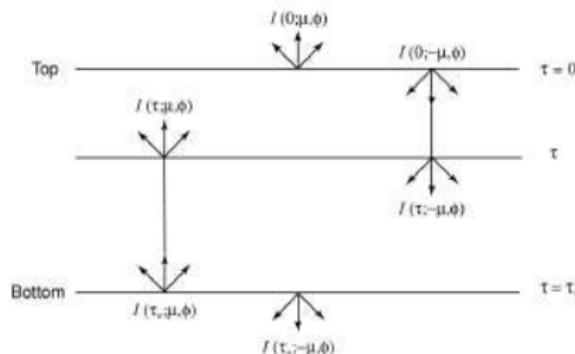


Figure 1.16 Upward (μ) and downward ($-\mu$) intensities at a given level τ and at top ($\tau = 0$) and bottom ($\tau = \tau_s$) levels in a finite, plane-parallel atmosphere.

Si utilizamos estas cantidades en la solución que obtuvimos (para $\tilde{\omega} < 1$), tenemos

$$R = \frac{r_\infty [e^{\Gamma\tau^*} - e^{-\Gamma\tau^*}]}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} \quad (13)$$

$$T = \frac{1 - r_\infty^2}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} \quad (14)$$

Albedo, transmitancia y absorptancia de nube

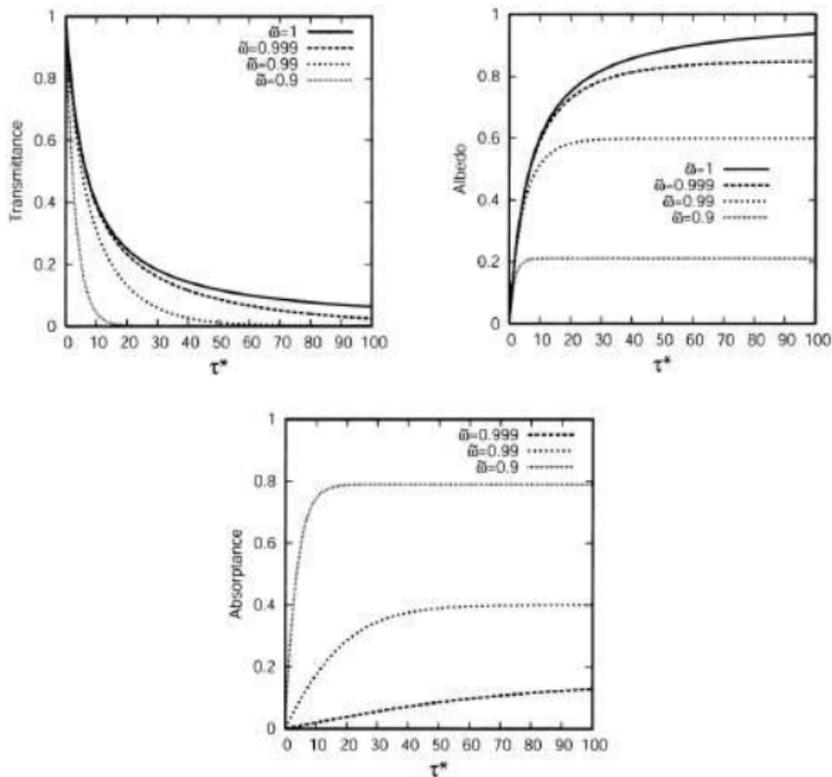


Figure: Petty Cap 13. $g = 0.85$.

- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple
- 3 ETR con dispersión múltiple
 - Método de los dos flujos
- 4 **Casos particulares**
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similaridad

Ejemplo

Nube semi-infinita

Si una nube tiene un gran espesor óptico de forma que se puede aproximar $\tau^* \rightarrow \infty$, decimos que es una nube semi-infinita. En este caso

$$I^\uparrow(\tau) = r_\infty I_0 e^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = I_0 e^{-\Gamma\tau}$$

$$R = r_\infty$$

$$T = (1 - r_\infty^2) e^{-\Gamma\tau^*}$$

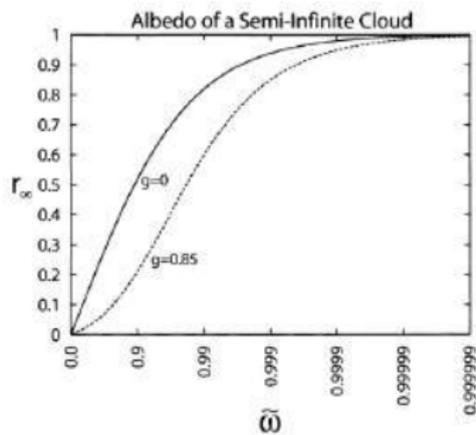


Fig. 13.4: The albedo of a semi-infinite cloud, as computed from (13.45).

¿Cuándo es buena aproximación considerar a una nube semi-infinita?

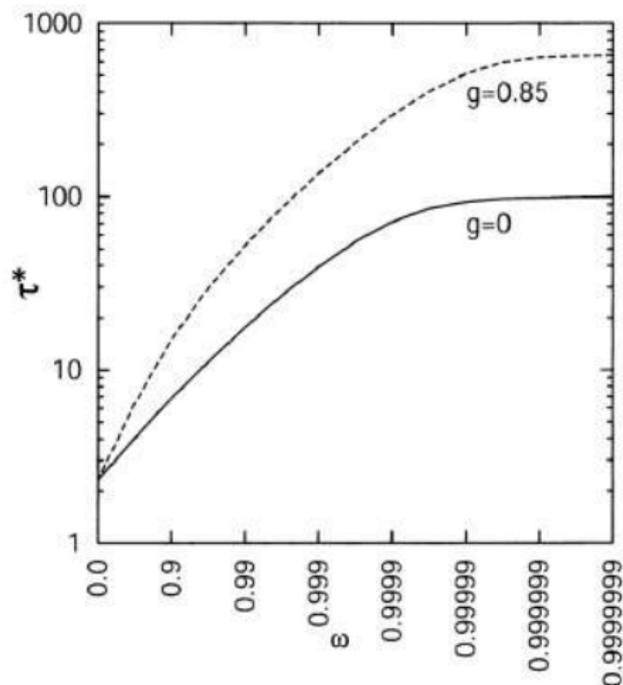


Fig. 13.9: The minimum cloud optical thickness τ^* that qualifies as approximately “semi-infinite”, based on the (arbitrary) requirement that the total transmittance be less than 1%.

Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos

La transmitancia total del flujo **difuso** se puede expresar como la suma de la contribución de los fotones que atraviesan la nube sin alterar su recorrido más los que han sido desviados por dispersión. Es decir:

$$T = T_{dif} + T_{dir}$$

Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos

La transmitancia total del flujo **difuso** se puede expresar como la suma de la contribución de los fotones que atraviesan la nube sin alterar su recorrido más los que han sido desviados por dispersión. Es decir:

$$T = T_{dif} + T_{dir}$$

Si aplicamos el ejemplo desarrollado a una capa atmosférica de espesor τ^* completamente absorbente ($\tilde{\omega} = 0$), tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}}\sqrt{1 - \tilde{\omega}} & \rightarrow & \Gamma = 2 \\ r_{\infty} &= \frac{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}} & \rightarrow & r_{\infty} = 0\end{aligned}$$

Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos

La transmitancia total del flujo **difuso** se puede expresar como la suma de la contribución de los fotones que atraviesan la nube sin alterar su recorrido más los que han sido desviados por dispersión. Es decir:

$$T = T_{dif} + T_{dir}$$

Si aplicamos el ejemplo desarrollado a una capa atmosférica de espesor τ^* completamente absorbente ($\tilde{\omega} = 0$), tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}}\sqrt{1 - \tilde{\omega}} &\rightarrow \Gamma &= 2 \\ r_\infty &= \frac{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}} &\rightarrow r_\infty &= 0\end{aligned}$$

Entonces tenemos (según la ecuación 14)

$$\Rightarrow T = e^{-2\tau^*} = e^{\tau^*/\bar{\mu}} \equiv T_{dir},$$

donde $\bar{\mu} = 0.5$ se interpreta como una dirección de incidencia equivalente, y todo lo transmitido se asocia a haces directos.

Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos

La transmitancia total del flujo **difuso** se puede expresar como la suma de la contribución de los fotones que atraviesan la nube sin alterar su recorrido más los que han sido desviados por dispersión. Es decir:

$$T = T_{dif} + T_{dir}$$

Si aplicamos el ejemplo desarrollado a una capa atmosférica de espesor τ^* completamente absorbente ($\tilde{\omega} = 0$), tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\sqrt{1 - g\tilde{\omega}}\sqrt{1 - \tilde{\omega}} &\rightarrow \Gamma &= 2 \\ r_\infty &= \frac{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - g\tilde{\omega}} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}} &\rightarrow r_\infty &= 0\end{aligned}$$

Entonces tenemos (según la ecuación 14)

$$\Rightarrow T = e^{-2\tau^*} = e^{\tau^*/\bar{\mu}} \equiv T_{dir},$$

donde $\bar{\mu} = 0.5$ se interpreta como una dirección de incidencia equivalente, y todo lo transmitido se asocia a haces directos.

Transmitancia difusa

T_{dir} solo depende de τ^* , no depende de g ni de $\tilde{\omega}$. Entonces su valor no cambiará en una capa dispersiva de igual τ^* . Entonces $T_{dif} = T - T_{dir}$, es decir

$$T_{dif} = \frac{1 - r_\infty^2}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} - e^{-2\tau^*} \quad (15)$$

Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos

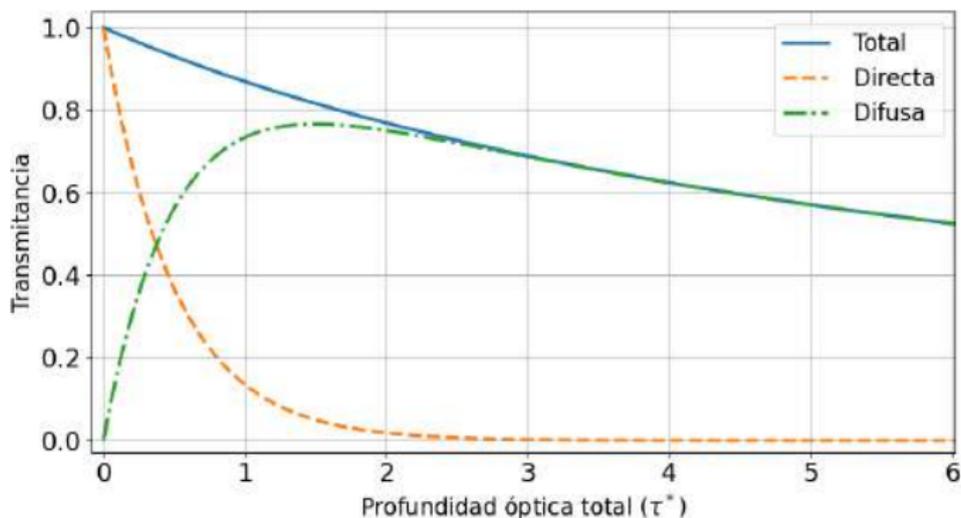


Figure: Transmitancias en función de la profundidad óptica de capa para $g = 0.85$ y $\tilde{\omega} = 0.9999$.

- Cuando una nube es ópticamente delgada ($\tau^* \ll 1$), la mayoría de la transmisión es directa y el componente difuso es pequeño. Se puede "ver" través de la nube.
- A medida que la capa se vuelve ópticamente más gruesa, la fracción difusa (T_{dif}) aumenta rápidamente. La difusa se convierte en el principal contribuyente a la transmitancia total.
- A medida que τ^* aumenta, la fracción difusa disminuye lentamente, mucho después de que T_{dir} ha llegado a cero.

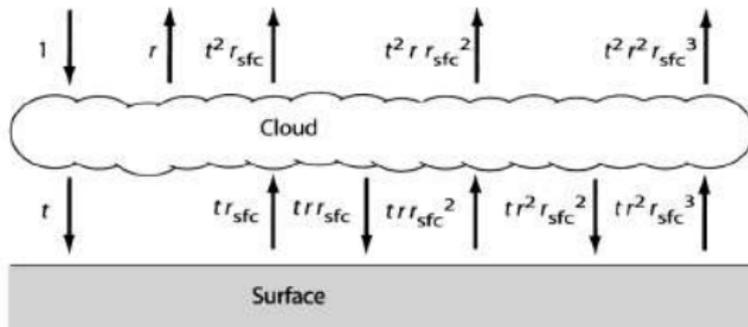
Las soluciones que encontramos asumen que la base de la capa es completamente absorbente: $I^\uparrow(\tau^*) = 0$. Si esto no fuera así, parte de esa radiación podría alcanzar la superficie, ser parcialmente reflejada y volver a incidir hacia arriba en el interior de la capa. Parte de ésta será reflejada por la capa hacia el suelo nuevamente, y otra porción será transmitida hacia arriba, etc. Para incluir este efecto se podrían resolver nuevamente las ecuaciones con diferentes condiciones de borde. Otra forma es considerar un **método de adición**.

Veamos un ejemplo sencillo: Partimos de la solución anterior (condiciones de borde $F^\downarrow(0) = F_0$ y $F^\uparrow(\tau^*) = 0$), con las cuales ya hallamos la transmitancia, T , y el albedo, R , **intrínsecos de la capa**. Además, consideremos que la reflectancia del suelo (o en este ejemplo simplificado, del borde inferior de la capa) es r_{sfc} y el albedo del borde inferior de la capa también es R .

Nubes sobre superficies no negras

Veamos un ejemplo sencillo: Partimos de la solución anterior (condiciones de borde $F^\downarrow(0) = F_0$ y $F^\uparrow(\tau^*) = 0$), con las cuales ya hallamos la transmitancia, T , y el albedo, R , **intrínsecos de la capa**. Además, consideremos que la reflectancia del suelo (o en este ejemplo simplificado, del borde inferior de la capa) es r_{sfc} y el albedo del borde inferior de la capa también es R .

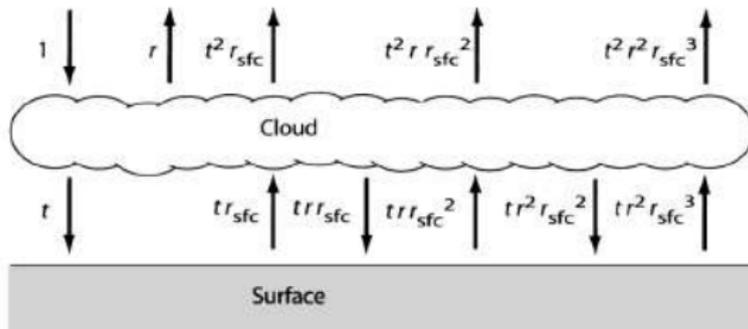
a) Combining cloud layer with reflecting surface



Nubes sobre superficies no negras

Veamos un ejemplo sencillo: Partimos de la solución anterior (condiciones de borde $F^\downarrow(0) = F_0$ y $F^\uparrow(\tau^*) = 0$), con las cuales ya hallamos la transmitancia, T , y el albedo, R , **intrínsecos de la capa**. Además, consideremos que la reflectancia del suelo (o en este ejemplo simplificado, del borde inferior de la capa) es r_{sfc} y el albedo del borde inferior de la capa también es R .

a) Combining cloud layer with reflecting surface



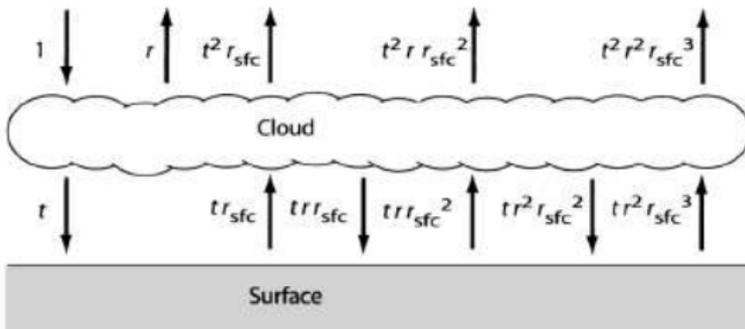
Teniendo en cuenta esto,

$$\frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = R + T^2 r_{sfc} + T^2 R r_{sfc}^2 + T^2 R^2 r_{sfc}^3 + T^2 R^3 r_{sfc}^4 + \dots$$

Nubes sobre superficies no negras

Veamos un ejemplo sencillo: Partimos de la solución anterior (condiciones de borde $F^\downarrow(0) = F_0$ y $F^\uparrow(\tau^*) = 0$), con las cuales ya hallamos la transmitancia, T , y el albedo, R , **intrínsecos de la capa**. Además, consideremos que la reflectancia del suelo (o en este ejemplo simplificado, del borde inferior de la capa) es r_{sfc} y el albedo del borde inferior de la capa también es R .

a) Combining cloud layer with reflecting surface



Teniendo en cuenta esto,

$$\frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = R + T^2 r_{sfc} + T^2 R r_{sfc}^2 + T^2 R^2 r_{sfc}^3 + T^2 R^3 r_{sfc}^4 + \dots$$

$$\frac{F^\downarrow(\tau^*)}{F_0} = T + T R r_{sfc} + T R^2 r_{sfc}^2 + T R^3 r_{sfc}^3 + \dots$$

Reordenando ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{F^{\uparrow}(0)}{F_0} = R + T^2 r_{sfc} [1 + R r_{sfc} + (R r_{sfc})^2 + (R r_{sfc})^3 + \dots]$$

$$\frac{F^{\downarrow}(\tau^*)}{F_0} = T [1 + (R r_{sfc}) + (R r_{sfc})^2 + (R r_{sfc})^3 + \dots]$$

Reordenando ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = R + T^2 r_{sfc} [1 + R r_{sfc} + (R r_{sfc})^2 + (R r_{sfc})^3 + \dots]$$

$$\frac{F^\downarrow(\tau^*)}{F_0} = T [1 + (R r_{sfc}) + (R r_{sfc})^2 + (R r_{sfc})^3 + \dots]$$

Propiedad de la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ si $x \in (0, 1)$

Entonces tenemos cantidades modificadas

$$\tilde{R} \equiv \frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} \equiv \frac{F^\downarrow(\tau^*)}{F_0} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T
- \tilde{R} es mayor a R

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T
- \tilde{R} es mayor a R
- si $T = 1$, entonces $R = 0$, entonces $\tilde{R} = r_{sfc}$ (no hay nube)

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T
- \tilde{R} es mayor a R
- si $T = 1$, entonces $R = 0$, entonces $\tilde{R} = r_{sfc}$ (no hay nube)
- mayor $r_{sfc} = 0$, mayor el flujo que llega al suelo.: Ejemplo: nieve superficial

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T
- \tilde{R} es mayor a R
- si $T = 1$, entonces $R = 0$, entonces $\tilde{R} = r_{sfc}$ (no hay nube)
- mayor $r_{sfc} = 0$, mayor el flujo que llega al suelo.: Ejemplo: nieve superficial
- Este procedimiento de sumar contribuciones según lo que sucede en una capa puede generalizarse para dos o más capas de espesor óptico relevante (dos alturas de nubes estratificadas, por ejemplo)

En resumen, el albedo y la transmitancia modificadas quedan

$$\tilde{R} = R + \frac{T^2 r_{sfc}}{1 - R r_{sfc}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{1 - R r_{sfc}}$$

- Si $r_{sfc} = 0$ se recuperan R y T
- \tilde{R} es mayor a R
- si $T = 1$, entonces $R = 0$, entonces $\tilde{R} = r_{sfc}$ (no hay nube)
- mayor $r_{sfc} = 0$, mayor el flujo que llega al suelo.: Ejemplo: nieve superficial
- Este procedimiento de sumar contribuciones según lo que sucede en una capa puede generalizarse para dos o más capas de espesor óptico relevante (dos alturas de nubes estratificadas, por ejemplo)
- También se puede aplicar a una serie de capas muy finas de la atmósfera para obtener las ecuaciones conocidas como método de adición.

- 1 Transferencia radiativa con dispersión
- 2 ETR con dispersión simple
- 3 ETR con dispersión múltiple
 - Método de los dos flujos
- 4 Casos particulares
 - Nube semi-infinita
 - Transmitancia difusa para haces directos y ya difundidos
 - Nubes sobre superficies no negras
- 5 Transformaciones de similitud

Escalado- δ de la función de fase

- Resolver la ETR para radiación solar en atmósferas con aerosoles y gotas de nube con métodos simplificados presenta dificultades.
- Esto se debe a que la función de dispersión para estas partículas está fuertemente concentrada hacia adelante (*forward-scattering*). Para las partículas de nubes típicas, la energía dispersada hacia adelante es 4-5 cinco órdenes de magnitud mayor que la dispersión lateral o hacia atrás.
- Aproximaciones para la función de fase en pocos términos puede alejar al modelo de comportamientos realistas.

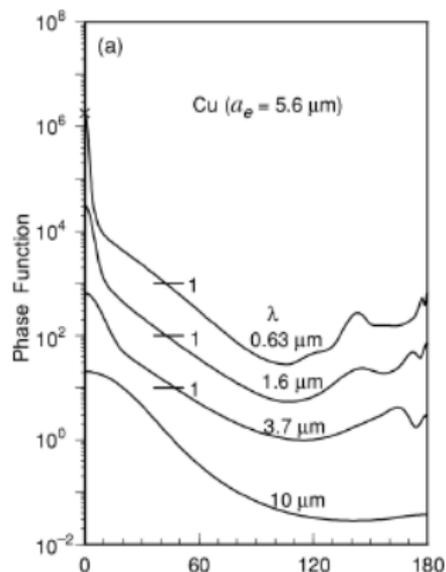


Figure: Liou Fig 5.15

Sin importar el método de resolución de la radiación difusa, es usual desarrollar los términos de la ecuación base (como I , $p(\Theta)$) en series truncadas. Estas series son en teoría infinitas, pero son truncadas en N términos para su resolución. Utilizar desarrollos en pocos términos (como los métodos de dos flujos) hace que la función de fase tenga un comportamiento no realista en algunos casos. Un camino simple para resolver esto (sin aumentar N), es utilizando un escalado δ de la función de fase \Rightarrow ...

Escalado- δ de la función de fase

Factor de asimetría

Se expresa a la función de fase como

$$p(\cos \Theta) = A p'(\cos \Theta) + B \delta(1 - \cos \Theta),$$

donde p es la función que se busca representar, δ es la Delta de Dirac y p' es la función de fase escalada (con menos *forward-scattering*). A, B son parámetros de ajuste de la aproximación.

Escalado- δ de la función de fase

Factor de asimetría

Se expresa a la función de fase como

$$p(\cos \Theta) = A p'(\cos \Theta) + B \delta(1 - \cos \Theta),$$

donde p es la función que se busca representar, δ es la Delta de Dirac y p' es la función de fase escalada (con menos *forward-scattering*). A, B son parámetros de ajuste de la aproximación.

Dado que se tienen que verificar la condición de normalización, esta expresión se reduce a un único parámetro f que se interpreta como la probabilidad de que un fotón dispersado siga en la dirección de su curso inicial.

$$p(\cos \Theta) = (1 - f) p'(\cos \Theta) + 2f \delta(1 - \cos \Theta),$$

Escalado- δ de la función de fase

Factor de asimetría

Se expresa a la función de fase como

$$p(\cos \Theta) = A p'(\cos \Theta) + B \delta(1 - \cos \Theta),$$

donde p es la función que se busca representar, δ es la Delta de Dirac y p' es la función de fase escalada (con menos *forward-scattering*). A, B son parámetros de ajuste de la aproximación.

Dado que se tienen que verificar la condición de normalización, esta expresión se reduce a un único parámetro f que se interpreta como la probabilidad de que un fotón dispersado siga en la dirección de su curso inicial.

$$p(\cos \Theta) = (1 - f) p'(\cos \Theta) + 2f \delta(1 - \cos \Theta),$$

En este caso, el factor de asimetría es

$$g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x p(x) dx = \frac{1-f}{2} \int_{-1}^1 x p'(x) dx + \frac{2f}{2} \int_{-1}^1 x \delta(x-1) dx,$$

entonces

$$g = (1 - f) g' + f \quad \Rightarrow \quad \boxed{g' = \frac{g - f}{1 - f}}$$

Escalado- δ de la función de fase

Factor de asimetría

Se expresa a la función de fase como

$$p(\cos \Theta) = A p'(\cos \Theta) + B \delta(1 - \cos \Theta),$$

donde p es la función que se busca representar, δ es la Delta de Dirac y p' es la función de fase escalada (con menos *forward-scattering*). A, B son parámetros de ajuste de la aproximación.

Dado que se tienen que verificar la condición de normalización, esta expresión se reduce a un único parámetro f que se interpreta como la probabilidad de que un fotón dispersado siga en la dirección de su curso inicial.

$$p(\cos \Theta) = (1 - f) p'(\cos \Theta) + 2f \delta(1 - \cos \Theta),$$

En este caso, el factor de asimetría es

$$g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x p(x) dx = \frac{1-f}{2} \int_{-1}^1 x p'(x) dx + \frac{2f}{2} \int_{-1}^1 x \delta(x-1) dx,$$

entonces

$$g = (1 - f) g' + f \quad \Rightarrow \quad \boxed{g' = \frac{g - f}{1 - f}}$$

- g' se reduce. Ejemplo: si $g = 0.8$ y $f = 0.5$, entonces $g' = 0.6$
- Si $f = g$, entonces $g' = 0$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi')$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

y sustituimos la expresión escalada (promediada azimutalmente²)

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') [(1-f) p'(\mu, \mu') + 2f \delta(\mu - \mu')] d\mu',$$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi')$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

y sustituimos la expresión escalada (promediada azimutalmente²)

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') [(1-f) p'(\mu, \mu') + 2f \delta(\mu - \mu')] d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu)(1 - f\tilde{\omega}) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi')$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

y sustituimos la expresión escalada (promediada azimutalmente²)

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') [(1-f) p'(\mu, \mu') + 2f \delta(\mu - \mu')] d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu)(1-f\tilde{\omega}) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{(1-f\tilde{\omega})d\tau} = I(\mu) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2(1-f\tilde{\omega})} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi')$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

y sustituimos la expresión escalada (promediada azimutalmente²)

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') [(1-f)p'(\mu, \mu') + 2f\delta(\mu - \mu')] d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu)(1-f\tilde{\omega}) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{(1-f\tilde{\omega})d\tau} = I(\mu) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2(1-f\tilde{\omega})} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

- Definiendo $\tau' = \tau(1-f\tilde{\omega})$ y $\tilde{\omega}' = \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{(1-f\tilde{\omega})}$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi\delta(\mu - \mu')\delta(\varphi - \varphi')$

¿Cómo queda la ETR?

Partimos de la ecuación para la difusa con promedio azimutal

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p(\mu, \mu') d\mu', \quad (16)$$

y sustituimos la expresión escalada (promediada azimutalmente²)

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') [(1-f) p'(\mu, \mu') + 2f \delta(\mu - \mu')] d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu)(1-f\tilde{\omega}) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

$$\mu \frac{dI(\mu)}{(1-f\tilde{\omega})d\tau} = I(\mu) - \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{2(1-f\tilde{\omega})} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

- Definiendo $\tau' = \tau(1-f\tilde{\omega})$ y $\tilde{\omega}' = \frac{(1-f)\tilde{\omega}}{(1-f\tilde{\omega})}$
- tenemos una expresión análoga a la ecuación 16:

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau'} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}'}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') p'(\mu, \mu') d\mu',$$

²Se utiliza que $\delta(1 - \cos \Theta) = 2\pi \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi')$

Tenemos un sistema similar, cuya ecuación es igual si se introducen los siguientes cambios:

$$g' = \frac{g - f}{1 - f}, \quad \tau' = \tau(1 - f\tilde{\omega}) \quad \text{y} \quad \tilde{\omega}' = \frac{(1 - f)\tilde{\omega}}{(1 - f\tilde{\omega})} \quad (17)$$

Interpretación

- Usando la δ , estamos considerando parte de la radiación dispersada como si no hubiese sido extinguida.
- Una porción f de los fotones dispersados seguirán "hacia adelante", cómo si no hubieran sido dispersados. Entonces el espesor óptico efectivo es menor
- Con esta hipótesis, la radiación absorbida es incambiada, pero la dispersada es menor, por lo que el coeficiente de dispersión cambia ($\beta'_s = \beta_s(1 - f)$), como también el coeficiente de extinción β_e . También el ω efectivo se ve alterado (recordar que $\omega = \beta_s/\beta_e$)

Fin